6.1 שיטת המשמיד - המשך

תרגיל

מצא אדלמ"ק A המשמיד(מאפס) את הפונקציות הבאות:

א. x^3e^{2x-1}

ב. $e^{-x}\sin 3x$

ג. $x^5\left(x^3+x\right)e^x$

ד. $1+x+x^2$

פתרון

א. את e^{2x} מאפס $D-2$. e^{-1} קבוע, ולכן $D-2$ מאפס גם את $e^{2x}\cdot e^{-1}=e^{2x-1}$.
הכפל בx^3 מעיד על כך שנרצה שריבוי השורש $\lambda=2$ יהיה 4. לכן

$$\Rightarrow A=(D-2)^4$$

$$\lambda_{1,2,3,4}=2,2,2,2$$

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3x^2e^{2x}+C_4x^3e^{2x}$$

ב. $e^{-x}\sin 3x$. רוצים שהשורשים של הפולינום האופייני יהיו $-1\pm 3i$

$$A=(D-(-1+3i))\left(D-(-1-3i)\right)=D^2+2D+10$$

$$\lambda^2+2\lambda+10,\lambda_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-2\pm 6i}{2}=-1\pm 3i$$

למה זה נכון? מתי $Ay=0$?:

$$\left(D^2+2D+10\right)y=0$$

$$y''+2y'+10y=0$$

מ. מאפיינת: $\lambda^2+2\lambda+10=0$:

$$\lambda_{1,2}=-1\pm 3i$$

$$\Rightarrow y=C_1e^{-x}\cos 3x+C_2e^{-x}\sin 3x$$

ג'ון פון נוימן: "במתמטיקה אתה לא מבין דברים, אתה פשוט מתרגל אליהם".

ג. $x^8e^x+x^6e^x$. x^8e^x מעיד על ריבוי 9 של השורש $\lambda=1$, ולכן $(D-1)^9$ מאפס אותו. x^6e^x מעיד על ריבוי 7 של $\lambda=1$. מספיק לבחור $A=(D-1)^9$ ואין צורך להכפיל את שניהם.

ד. 1 מתאפס ע"י D, x מתאפס ע"י D^2, וx^2 מתאפס ע"י D^3. $A=D^3$ מאפס את הסכום של כולם.

תרגיל

מצא את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

א. $$\frac{d^3u}{dt^3}+\frac{d^2u}{dt^2}-2u=0$$

פתרון

מ. אופיינית: $\lambda^3+\lambda^2-2=0$. קל לראות ש$\lambda_1=1$ שורש. נבצע חילוק פולינומים:

$$\frac{\lambda^3-\lambda^2-2}{\lambda-1}=\frac{\lambda^3-\lambda^2+2\lambda^2-2}{\lambda-1}=\frac{\lambda^2(\lambda-1)+2\lambda^2-2\lambda+2\lambda-2}{\lambda-1}$$

$$=\lambda^2+\frac{2\lambda(\lambda-1)+2(\lambda-1)}{\lambda-1}=\lambda^2+2\lambda+2$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}\cos t+C_3e^{-t}\sin t}$$

ב. $$y^{(4)}+y'''+y''=0$$

פתרון

מ. אופיינית: $\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2=0$

$$\lambda^2\left(\lambda^2+\lambda+1\right)=0$$

$$(\lambda-0)(\lambda-0)\left(\lambda^2+\lambda+1\right)=0$$

$$\lambda_{1,2}=0$$

$$\lambda_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y(x)=C_1e^{0x}+C_2xe^{0x}+e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$

ג. $$\frac{d^5u}{dr^5}+5\frac{d^4u}{dr^4}-2\frac{d^3u}{dr^3}-10\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}+5u=0$$

פתרון

מ. אופיינית: $\lambda^5+5\lambda^4-2\lambda^3-10\lambda^2+\lambda+5=0$. $\lambda_1=1$ שורש(עובדה!). בחילוק פולינומים נגיע ל

$$\Rightarrow \lambda^5+5\lambda^4-2\lambda^3-10\lambda^2+\lambda+5=(\lambda-1)\left(\lambda^4+6\lambda^3+4\lambda^2-6\lambda-5\right)$$

ממשיכים לחלק, ובסופו של דבר מקבלים שהפולינום האופייני הוא

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2(\lambda+5)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(r)=C_1e^r+C_2re^r+C_3e^{-r}+C_4re^{-r}+C_5e^{-5r}}$$

שאלה ממבחן(מועד ב׳ תשע״א)

(א) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $y'''''-3y'''-4y'=0$

(ב) מצא משוואה דיפרנציאלית עם מקדמים ממשיים קבועים שיש לו פתרון $\left(x^2+1\right)e^{2x}\cos 4x$ וכתוב את הפתרון הכללי של המשוואה שמצאת.

פתרון

(א) המשוואה האופיינית $\lambda^5-3\lambda^3-4\lambda=0$

$$\lambda\left(\lambda^4-3\lambda^2-4\right)=0$$

$\lambda_1=0$. החלק השני זו משוואה דו ריבועית - נסמן $\lambda^2=\mu$:

$$\mu^2-3\mu-4=0$$

$$\mu_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=4,-1$$

אם $\lambda^2=\mu=4 \Leftarrow \lambda_{2,3}=\pm2$
אם $\lambda^2=\mu=-1 \Leftarrow \lambda_{4,5}=\pm i$

$$\boxed{y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}+C_4\cos x+C_5\sin x}$$

(ב) רוצים לאפס את $x^2e^{2x}\cos 4x$. נצטרך שלשורשים $2\pm 4i$ יהיה ריבוי 3, ולכן

$$L = \left[\left(D-(2+4i)\right)\left(D-(2-4i)\right)\right]^3 = \left[D^2-4D+20\right]$$

$$= D^6-12D^5+108D^4-544D^3+2160D^2-4800D+8000$$

המשוואה היא

$$y^{(6)}-12y^{(5)}+108y^{(4)}-544y^{(3)}-12690y''-4800y'+8000y=0$$

פתרון המשוואה הוא(לפי הבנייה):

$$y = C_1e^{2x}\cos 4x+C_2e^{2x}\sin 4x+C_3xe^{2x}\cos 4x+C_4xe^{2x}\sin 4x+C_5x^2e^{2x}\cos 4x+C_6x^5e^{2x}\sin 4x$$

<u>חשוב</u>: מי שהיה לוקח את $L=\left[D-(2+di)\right]\left[D-(2-4i)\right]^4$ היה מתקשה בפתרון.

תרגיל

א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $y''+\omega_0^2y=\cos\left(\omega_0 t\right)$, $\omega_0>0$

ב. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $y''+\omega_0^2y=\cos\left(\omega t\right)$, $\omega_0>0$, $\omega>0$, $\omega_0\neq\omega$

ג. הוכח שניתן לקבל את התשובה של סעיף א ע"י חישוב הגבול כאשר $\omega\to\omega_0$ של התשובה בסעיף ב.

פתרון

א. נשתמש בשיטת המשמיד. המשוואה היא

$$\left(D^2+\omega_0^2\right)y=\cos\omega_0 t$$

$$\left(D^2+\omega_0^2\right)^2y=0$$

שורשי הפולינום האופייני: $\pm i\omega$ "0" בריבוי 2 כל אחד.

$$\Rightarrow y = C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t+C_3t\cos\omega_0 t+C_4t\sin\omega_0 t$$

כללי:

$$y=y_c+y_p$$

$$y_p=y-y_c$$

$$y_p' = C_3\cos\omega_0 t-\omega_0 t\sin\omega_0 t\cdot C_3+C_4\sin\omega_0 t+C_4\omega_0 t\cos\omega_0 t$$

$$y'' = \begin{array}{l} -\omega_0 C_3 \sin\omega_0 t - \omega_0 C_3 \sin\omega_0 t - C_3\omega_0^2 t\cos\omega_0 t \\ -C_4\omega_0\cos\omega_0 t + C_4\omega_0\cos\omega_0 t - \omega_0^2 C_4 t\sin\omega_0^2 t \end{array}$$

נציב במד"ר המקורית:

$$(-2\omega_0 C_3)\sin\omega_0 t + (2\omega_0 C_4)\cos\omega_0 t = 1\cdot\cos\omega_0 t + 0\cdot\sin\omega_0 t$$

$$\begin{cases} -2\omega_0 C_3 = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = 0} \\ 2\omega_0 C_4 = 1 \Rightarrow \boxed{C_4 = \dfrac{1}{2\omega_0}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \boxed{C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{t\sin\omega_0 t}{2\omega_0}}$$

ב. לאחר הפעלת $D^2+\omega^2$ מקבלים $\left(D^2+\omega^2\right)\left(D^2+\omega^2\right)y = 0$

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm i\omega, \pm i\omega_0$$

$$\Rightarrow y = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + C_3\cos\omega t + C_4\sin\omega t$$

$$y = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{\cos\omega t}{\omega_0^2-\omega^2}$$

ג. אי אפשר להשאיף מייד $\omega\to\omega_0$! "נסדר קצת"

$$y = \left(C_1 - \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} + \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{\cos\omega t}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$= \left(C_1 + \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{\cos\omega^t}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$y = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t + \frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$\lim_{\omega\to\omega_0} y = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t + \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{\cos\omega t - \cos\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$= A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t + \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{\dfrac{d}{d\omega}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)}{\dfrac{d}{d\omega}(\omega_0^2-\omega^2)}$$

$$\boxed{A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t + \frac{t\sin\omega_0 t}{2\omega_0}}$$

פתרון מלא יותר ב www.math-wiki.com