תרגיל בית 4 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 3.12.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תארו את כל המחלקות השמאליות ב-$\mathbb{Z}_{30}/\langle 3\rangle$.

שאלה 2. תהי קבוצה $X=\{a,b\}$. הוכיחו שיש שתי פעולות שונות של $\mathbb{Z}_2$ על X. מי מהן טרנזיטיבית?

שאלות להגשה

שאלה 3. רמז: הסעיפים הבאים דורשים קצת קומבינטוריקה.

א. מצאו כמה איברים מסדר 6 יש בחבורה S_6.

ב. מצאו כמה איברים מסדר 2 יש בחבורה S_6.

שאלה 4. מצאו את האינדקסים הבאים:

א. $[U_{14}:\langle 11\rangle]$ רמז: משפט לגראנז'.

ב. $[\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_8:\langle(2,2)\rangle]$ רמז: משפט לגראנז'.

ג. $[\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:\langle(2,2)\rangle]$ רמז: קודם תארו את המחלקות השמאליות.

שאלה 5. תהי G חבורה ותהינה $H,K\leq G$ תת־חבורות סופיות שלה.

א. הוכיחו שאם $(|H|,|K|)=1$, אז $H\cap K=\{e\}$.

ב. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H|=|K|=p$ וגם $H\neq K$, אז $H\cap K=\{e\}$.

שאלה 6. תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל איבר $e\neq x\in G$ מתקיים $x^{-1}\notin \mathrm{conj}(x)$ (כלומר ההופכי של x לא שייך למחלקת הצמידות של x).

שאלה 7. תהי G חבורה ותהי $S\subseteq G$ תת־קבוצה לא ריקה. נגדיר את המְרַכֵּז של S ב-G להיות

$$C_G(S)=\{g\in G\,|\,\forall s\in S, gs=sg\}$$

זו הכללה למושג מְרַכֵּז של איבר $s\in G$ שבכיתה סימנו $C_G(s)$.

א. הוכיחו שאם $G \supseteq T \supseteq S$, אז $C_G(T) \subseteq C_G(S)$.

ב. הוכיחו

$$C_G(S) = \bigcap_{s\in S} C_G(s) = \bigcap_{s\in\langle S\rangle} C_G(s) = C_G(\langle S\rangle)$$

והסיקו כי $C_G(S) \leq G$.

ג. תנו דוגמה לחבורה G ותת־קבוצה S כך ש-$|S| \geq 2$ וגם $S \subsetneqq C_G(S) \subsetneqq G$. רמז: אפשר להסתפק ב-$G = S_3$ (אבל לא חייבים!)

ד. תנו דוגמה לחבורה G ותת־קבוצה S כך ש-$|S| \geq 2$ וגם $C_G(S) \subsetneqq S \subsetneqq G$. רמז: אפשר להסתפק ב-$G = S_3$ (אבל לא חייבים!)

שאלה 8. תזכורת: דגל מלא של $V = \mathbb{R}^n$ הוא שרשרת של מרחבים וקטוריים

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

כאשר $\dim V_i = i$. נסמן ב-$\mathcal{B}$ את אוסף הדגלים המלאים של V.

א. הוכיחו כי החבורה $GL_n(\mathbb{R})$ פועלת על $\mathcal{B}$ לפי

$$A * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n) = A \cdot V_0 \subset A \cdot V_1 \subset \cdots \subset A \cdot V_n$$

כאשר $A \cdot V_i = \{Av \mid v \in V_i\}$. בנוסף הראו שהפעולה הזו טרנזיטיבית.

ב. מצאו את המייצב של הדגל הסטנדרטי $\{0\} \subset \langle e_1\rangle \subset \langle e_1, e_2\rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ כאשר $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי. רמז: אינדוקציה על i.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. תהי I קבוצה מכוונת (כלומר I היא קבוצה סדורה חלקית כך שלכל $i, j \in I$ קיים $k \in I$ כך ש-$k > i, j$). מערכת של חבורות $\{G_i\}_{i\in I}$ נקראת רשת עולה אם לכל $i < j$ מתקיים $G_i \subseteq G_j$.
הוכיחו שבמקרה זה $\bigcup_{i\in I} G_i$ היא חבורה. בפרט, אם ישנה שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$, אז גם איחוד השרשרת הוא חבורה.

שאלה 10. יהי $\Psi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ אופרטור מקבוצה סדורה חלקית $(\mathcal{L}, \leq)$ לעצמה.

א. הוכיחו שאם Ψ מקיים את שני התנאים:

- אם $A \leq B$, אז $\Psi(B) \leq \Psi(A)$ לכל $A, B \in \mathcal{L}$.
- לכל $A \in \mathcal{L}$ מתקיים $A \leq \Psi^2(A)$.

אז $\Psi^3 = \Psi$. כלומר שלכל $A \in \mathcal{L}$ מתקיים $\Psi(\Psi(\Psi(A))) = \Psi(A)$.

ב. הסיקו שלכל תת־חבורה $H \leq G$ מתקיים $C_G(C_G(C_G(H))) = C_G(H)$.

בהצלחה!