**מקליד:** עידן אריה
**מרצה:** פרופ' נתן נתניהו
**תאריך:** 2018-12-26

**עיבוד תמונות**
**89-560-01**

---

# תכונות בסיסיות של התמרות פוריה

## סכום (פילוג)

$$\mathcal{F}\left(f\left(x,y\right)+g\left(x,y\right)\right)=F\left(u,v\right)+G\left(u,v\right)$$

כאשר $F\left(u,v\right)=\mathcal{F}\left(f\left(x,y\right)\right)$ ו-$G\left(u,v\right)=\mathcal{F}\left(g\left(x,y\right)\right)$

## דמיון (scaling)

$$\mathcal{F}\left(f\left(ax,by\right)\right)=\frac{1}{|ab|}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$$

הוכחה (בחד־מימד):

$$\mathcal{F}\left(...\right)=F\left(u\cos\theta-v\sin\theta,u\sin\theta+v\cos\theta\right)$$

$$f\left(x\right)\iff F\left(w\right)$$

$$f\left(ax\right)\iff ?$$

$$\mathcal{F}\left(f\left(ax\right)\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(ax\right)e^{-i2\pi wx}\,\mathrm{d}x=\left|\frac{1}{a}\right|\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(u\right)e^{-i2\pi\frac{w}{a}u}\,\mathrm{d}u=\left|\frac{1}{a}\right|F\left(w\right)$$

ככל שהתדר המקורי יותר רחב, ככה צריך "להתאמץ" יותר כדי "לאפס" אותו ־ ולכן התדרים יותר צפופים.

## הכללה של דמיון ־ טרנספורמציה לינארית

אם $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, אז מה זה $\mathcal{F}\left(f\left(x',y'\right)\right)$?

$$\mathcal{F}\left(f\left(a_1x+b_1y,a_2x+b_2y\right)\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(a_1x+b_1y,a_2x+b_2y\right)e^{-i2x\left(ux+vy\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ונעשה החלפת משתנים $z=a_2x+b_2y\qquad w=a_1x+b_1y$ ואז

$$x=A_1w+B_1z\qquad y=A_2w+B_2z$$

$$\mathrm{d}x=A_1\,\mathrm{d}w+B_1\,\mathrm{d}z\qquad \mathrm{d}y=A_2\,\mathrm{d}w+B_2\,\mathrm{d}z$$

כאשר

$$A_1=\frac{b_2}{a_1b_2-a_2b_1}\qquad B_1=\frac{-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$A_2=\frac{-a_2}{a_1b_2-a_2b_1}\qquad B_2=\frac{-b_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

ואז התמרת הפוריה שלנו היא:

$$\mathcal{F}\left(f\left(a_1x+b_1y,a_2x+b_2y\right)\right)=\cdots=\left(A_1B_2-A_2B_1\right)F\left(A_1u+A_2v,B_1u+B_2v\right)$$

### העתקה (shift)

$$\mathcal{F}\left(f\left(x-a,y-b\right)\right)=F\left(u,v\right)\cdot e^{-i2\pi\left(au+bv\right)}$$

כלומר שוב, הערך המוחלט נותר קבוע - רק הפאזה משתנה.

### סיבוב (rotation)

מקרה פרטי של טרנספורמציה לינארית

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\mathcal{F}\left(...\right)=F\left(u\cos\theta-v\sin\theta,u\sin\theta+v\cos\theta\right)$$

כלומר התמרת פוריה של פונקציה מסובבת היא מסובבת בעצמה.

### פריקות

אם

$$f\left(x,y\right)=f_1\left(x\right)\cdot f_2\left(y\right)$$

אזי:

$$F\left(u,v\right)=F_1\left(u\right)\cdot F_2\left(v\right)$$

כאשר:

$$F_1\left(u\right)=\mathcal{F}\left(f_1\left(x\right)\right)\qquad F_2\left(v\right)=\mathcal{F}\left(f_2\left(v\right)\right)$$

## התמרות פורייה של פונקציה גאוסיאנית

$$f\left(x\right)=e^{-\pi x^2}$$

(הרחבה לדו-מימד: $f\left(x\right)=e^{-\pi\left(x^2+y^2\right)}$)
זו פונקציית צפיפות הסתברות.
התמרת הפורייה היא:

$$F\left(w\right)=\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x^2}\cdot e^{-j2\pi wx}\,\mathrm{d}x=\cdots=e^{-\pi w^2}$$

וזה נשאר גאוסיאני.

# פונקציית דלתא (הלם, impulse, Dirac)

**המטרה:** לעבור ממרחב רציף למרחב דיסקרטי

**הגדרה:** פונקציית דלתא מוגדרת לפי האינטגרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

עבור $\varepsilon > 0$ קטן באופן שרירותי.

למעשה $\delta(x) = 0$ לכל $x \neq 0$ אך **<u>בראשית עצמה הפונקציה אינה מוגדרת!</u>**
לפונצייה נקודת אי־רציפות ב0.
ההגדרה המוכללת היא:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(x)\ \mathrm{d}x = A$$

או

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\ \mathrm{d}x = f(0)$$

## תכונות של פונקציית הדלתא

### shifting

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x - x_0)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x + x_0)\ \mathrm{d}x = f(x_0)$$

### Scaling

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

**הוכחה:** עבור פונקציה שרירותית $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\,f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,f\left(\frac{t}{a}\right)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{|a|}f(0) = \cdots$$

עבור $t = ax$, $x = \frac{t}{a}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}t$

$$\cdots = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|a|}\delta(x)\right) f(x)\ \mathrm{d}x$$

ניתן עוד להראות כי:

$$u'(x)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)=\delta(x)$$

כאשר $u(x)$ הינה פונקציית המדרגה:

$$u(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

# קונבולוציה

**הגדרה:** בחד־מימד:

$$f(x)*g(x)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\,g(x-\tau)\;\mathrm{d}\tau$$

נשים לב ש$x$ הוא בכלל לא פונקציה של האינטגרל - לכל $x$ נקבל ערך אחר של האינטגרל. לכן סה"כ התוצאה היא פונקציה חדשה של $x$.

קל לראות כי:

$$f*g=g*f$$

וכן:

$$f*(g*h)=(f*g)*h$$

נשים ♡: האינטגרל יתן ערך שונה מ0 רק כאשר יש חפיפה בין $f$ ל$g$:

$$(f*g)(x)\neq 0\implies\nexists_{\tau}f(\tau)\neq 0\wedge g(x-\tau)\neq 0$$

## הרחבה לדו־מימד

$$f(x,y)*g(x,y)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\,g(x-u,y-v)\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$