שיעורי בית 4

4 בדצמבר 2016

1. הוכח/הפרך כי H היא ת"ח של G במקרים הבאים

פתרון : זיכרו שבשביל להראות כי $G \subseteq H$ תת חבורה צריך להראות ש

- איבר היחידה שייך ל H כלומר $e \in H$
- לכל $h_1 h_2 \in H$ מתקיים כי $h_1 h_2^{-1} \in H$

(א) $H = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} = G$

פתרון : ת"ח כי $a+ai, b+bi \in H$ אזי $(a+ai)-(b+bi) = a-b+(a-b)i \in$ H בנוסף איבר היחידה $0 \in H$ (הוא מתקבל אם ניקח $a = 0$)

(ב) $H = m\mathbb{Z}_n = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq \mathbb{Z}_n = G$

פתרון : ת"ח כי $mz_1, mz_2 \in H$ אזי $mz_1 - mz_2 = m(z_1 - z_2) \in H$ בנוסף איבר היחידה $0 \in H$ (הוא מתקבל עבור $z = 0$)

(ג) $H = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid |A| \neq 0\} \subseteq \mathbb{F}^{n\times n} = G$

פתרון : לא ת"ח כי $I, -I \in H$ אבל $I - I = 0 \notin H$

(ד) תהא G חבורה ו $n \in \mathbb{N}$. $H = \{g^n | \, g \in G\}$

פתרון : לא. למשל $G = S_3$. ו $n = 3$ אזי $H = \{id, (1,2), (2,3), (13)\}$ אינה ת"ח כי אין סגירות.

(ה) תהא G חבורה חילופית ו $n \in \mathbb{Z}$. $H = \{g^n | \, g \in G\}$

פתרון : ת"ח כי $g_1^n, g_2^n \in H$ אזי $g_1^n (g_2^n)^{-1} = g_1^n \left(g_2^{-1}\right)^n = \left(g_1 g_2^{-1}\right)^n \in H$ כאשר המעבר האחרון נכון בגלל ש H חילופית. בנוסף $e^n = e \in H$

(ו) $H = \{x^2 | x \in \mathbb{Z}_4\} \subseteq \mathbb{Z}_4$ פתרון : נחשב מפורש $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 0, 3^2 = 1$ ולכן

$$H = \{0, 1\}$$

ולכן H אינה תת חבורה כי $1 + 1 = 2 \notin H$ ואין סגירות לחיבור

(ז) $H=\{x^3|x\in\mathbb{Z}_5\}\subseteq\mathbb{Z}_5$

פתרון : נחשב מפורש $0^3=0,1^3=1,2^3=3,3^3=2,4^3=4$ ולכן

$$H=\{0,1,3,2,4\}$$

כלומר H שווה לכל $\mathbb{Z}_5$ ולכן תת חבורה.

(ח) $H=\left\{\frac{a}{b}\,|\,a\in\mathbb{Z},\,b\in\mathbb{N},\,\frac{b}{4}\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathbb{Q}$

פתרון : זוהי תת חבורה כי H אינה ריקה. בנוסף:

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{b'a-ba'}{bb'}$$

עבור $\frac{a}{b},\frac{a'}{b'}\in H$ נקבל ש 4 מחלק את b,b' ובפרט את bb' ולכן גם

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{b'a-ba'}{bb'}\in H$$

2. לכל $\sigma\in S_n$ נגדיר $\sigma(I)\in\mathbb{F}^{n\times n}$ להיות מטריצה $n\times n$ שמתקבלת ממטריצת היחידה ע"י הפעלת התמורה על השורות. כלומר

$$R_i(\sigma(I))=e_{\sigma^{-1}(i)}$$

כאשר $R_i(\sigma(I))$ מסמל את השורה ה i ית של המטריצה $\sigma(I)$.

למשל אם $\sigma=(1,2,4)\in S_4$ [$\Leftarrow$ $\sigma^{-1}=(4,2,1)$] אזי

$$\sigma(I)=\begin{pmatrix} & & & 1\\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} - & e_4 & -\\ - & e_1 & -\\ - & e_3 & -\\ - & e_2 & -\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} - & e_{\sigma^{-1}(1)} & -\\ - & e_{\sigma^{-1}(2)} & -\\ - & e_{\sigma^{-1}(3)} & -\\ - & e_{\sigma^{-1}(4)} & -\end{pmatrix}$$

במילים אחרות. הוקטור e_i (ששוה לשורה ה i ית של I) עובר לשורה $\sigma(i)$.

הוכיחו כי $H=\{\sigma(I)\,:\,\sigma\in S_n\}$ תת חבורה של $GLn(\mathbb{F})=\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}\,:\,|A|\neq0\}$ המטריצות ההפיכות (שימו לב שהפעולה היא כפל מטריצות) .

פתרון : זוהי תת חבורה כי H אינה ריקה. כי $I\in H$ (אם ניקח את $\sigma=id$ אזי $\sigma(I)=I$)

עבור $\sigma_1(I),\sigma_2(I)\in H$ מתקיים כי

$$R_i\left(\sigma_1(I)\cdot\sigma_2(I)\right)=R_i\left(\sigma_1(I)\right)\cdot\sigma_2(I)=e_{\sigma_1^{-1}(i)}\cdot\sigma_2(I)=R_{\sigma_1^{-1}(i)}(\sigma_2(I))=e_{\sigma_2^{-1}\left(\sigma_1^{-1}(i)\right)}=e_{(\sigma_1\sigma_2)^{-1}(i)}=R_i(\sigma_1\sigma_2(I$$

ולכן

$$\sigma_1(I)\cdot\sigma_2(I)=\sigma_1\sigma_2(I)\in H$$

ולכן יש סגירות לחיבור. בשביל סגירות להופכי נשתמש במה שהוכחנו. אכן: יהא $\sigma(I) \in H$ אזי

$$\sigma(I) \cdot \sigma^{-1}(I) = \sigma\sigma^{-1}(I) = I$$

ולכן ההופכי של $\sigma(I)$ הוא $\sigma^{-1}(I) \in H$

3. תהא G עם $n > 2$ איברים. הוכח כי לא קיימת $H \leq G$ עם $n-1$ איברים.

פתרון : נניח בשלילה כי קיימת $H \leq G$ עם $n-1$ איברים. אזי קיים איבר יחיד $g \in G \backslash H$.

כיוון שב H יש לפחות 2 איברים אזי קיים $e \neq h \in H$. בנוסף $gh \in H$ כי $gh \neq g$ (אם $gh = h$ אז $g = e$ ע"י הכפלת h^{-1} משמאל). אבל Hת"ח ולכן קיים $h^{-1} \in H$ וגם מתקיים סגירות $g = (gh)\,h^{-1} \in H$. סתירה

4. תהא G חבורה $H_1, H_2 \leq G$ הוכח כי

$$[H_1 \subseteq H_2 \vee H_2 \subseteq H_1] \iff [H_1 \cup H_2 \leq G]$$

פתרון : הכיוון $(\Rightarrow)$ טריוואלי. נוכיח את הכיוון $(\Leftarrow)$: נניח בשלילה כי $[H_1 \cup H_2 \leq G]$ אבל $H_1 \nsubseteq H_2 \wedge H_2 \nsubseteq H_1$

אזי קיימים $h_1 \in H_1 \backslash H_2,\ h_2 \in H_2 \backslash H_1$. כיוון ש $h_1, h_2 \in H_1 \cup H_2$ אזי גם $h_1 + h_2 \in H_1 \cup H_2$ כי מניחים כי זוהי ת"ח.

כעת מהגדרת איחוד נובע כי $h_1 + h_2 \in H_1$ או $h_1 + h_2 \in H_2$. בה"כ $h_1 + h_2 \in H_1$. כיוון ש $h_1 \in H_1$ אזי גם $-h_1 \in H_1$ואז $h_2 = (h_1 + h_2) + (-h_1) \in H_1$ כי H_1 חבורה . סתירה לכך ש $h_2 \notin H_1$.