בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מס' : 05/07 -88-211
המרצים: מיכאל מגרל ו רוני ביתן
תאריך: 24.09.09
מועד ב'
חומר עזר: רק מחשבון
משך המבחן: שעתיים

השאלות – יש לענות על חמש מתוך שש:

שאלה 1.

תהא $G=S_4$ הפועלת על הקבוצה $X=\{1,2,...,4\}$ ע"י: $g*x=g(x)$.

א. חשב את המייצב A של $x=2$.

ב. האם $A\triangleleft G$? נמק.

ג. האם מחלקת הצמידות של כל $id\neq\alpha\in A$ מוכלת בתוך A ?

ד. מהי הדרגה של A (מס' האיברים המינימלי שיכולים ליצור יחד את A) ?

שאלה 2.

תהא G חבורת p הפועלת על קבוצה X. הראה ש:

א. אם p אינו מחלק את $|X|$ אז בהכרח קיימת לפחות נקודת שבת אחת.

ב. כל מייצב של איבר ב- X הוא ת"ח פתירה.

ג. אם $X=G$ והפעולה היא ההצמדה אז יש בהכרח יותר מנקודת שבת אחת.

שאלה 3.

א. האם קיים מונומורפיזם מ- $\mathbf{GL}_3(\mathbb{Q})$ ל- $(\mathbb{Q}^{12},+)$?

ב. תהא $G=(\langle n\rangle,+)$ עבור: $1<n\in\mathbb{N}$. האם קיים אפימורפיזם מ- G ל- $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$?

ג. תהא G חבורה מסדר 21 כך שישנם יותר משני איברים מסדר 3.
הראה כי G אינה אבלית אבל פתירה.

שאלה 4.

א. הוכח שבכל אגודה סופית $(X,\cdot)$ קיים איבר $a\in X$ כך ש: $a^2=a$.

תן דוגמה נגדית במקרה שהאגודה היא אינסופית.

ב. פתור באמצעות משפט אוילר את המשוואה:

$9999x \equiv 3737373737^{9999} + 2009 \bmod 40$.

ג. מצא את מספר המונומורפיזמים מהחבורה: $G=\langle cis36^\circ\rangle$ לתוך: $\Omega_{25}\times\mathbb{Z}_4$.

שאלה 5.

נתייחס לחבורה הסימטרית S_p כאשר p הוא מספר ראשוני.

א. כמה איברים מסדר p יש בחבורה?

ב. חשב עפ"י סעיף א' את מספר תתי-החבורות מסדר p בתוך S_p.

ג. בעזרת סעיף ב ומשפט Sylow 3 הסק ש: $(p-1)!\equiv(p-1) \bmod p$

(האם זה מוכר לכם כאחד מהמשפטים ?) .

שאלה 6.

א. הוכח כי החבורה $\Omega_\infty=\left\{z\in\mathbb{C} \mid \exists n\in\mathbb{Z}: z^n=1\right\}$ של שורשי יחידה אינה נוצרת סופית.

הוכח:

ב. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\simeq\mathbb{T}$

ג. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\simeq\Omega_\infty$

ד. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}\simeq\mathbb{T}/\Omega_\infty$

כאשר $\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z}$ הם חבורות של ממשיים, רציונליים, שלמים ו- $\mathbb{T}=\left\{z\in\mathbb{C}^*: \|z\|=1\right\}$.