

תרגיל 11 בפונקציות מרוכבות

1. תהי z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של $f(z)$. תהי $g(z)$ פונקציה שלמה ולא קבועה. הוכיחו כי z_0 היא גם סינגולריות עיקרית של ההרכבה $g \circ f$.
פתרון: היות ש $g(z)$ אינה פונקציה קבועה, קיימים a, b כך ש

$$g(a) \neq g(b)$$

- היות ש z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של f , קיימות סדרות a_n, b_n המתכנסות ל z_0 כך ש

$$f(a_n) \rightarrow a$$

$$f(b_n) \rightarrow b$$

היות ש g אנליטית ולכן רציפה, יתקיים כי

$$gf(a_n) \rightarrow g(a)$$

$$gf(b_n) \rightarrow g(b)$$

כאמור $g(a) \neq g(b)$ ולכן הגבול

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z))$$

לא קיים, כלומר z_0 היא נקודת סינגולריות עיקרית של ההרכבה.

2. פתחו את הפונקציה

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$$

לטור לורך בטבעת הנתונה

$$(א) \text{ הטבעת } |z-2| > 2$$

פתרון: קודם כל יותר נוח להציב $w = z - 2$ ואז לדבר על

$$\frac{1}{(w+2)^2 w}$$

בטבעת $|w| > 2$. ברור שהגורם של $\frac{1}{w}$ לא יעשה לנו בעיות. נסתכל רק על

$$\frac{1}{(w+2)^2}$$

ונשתמש בגזירה איבר איבר. אנחנו יודעים ש

$$\begin{aligned} \frac{1}{(w+2)} &= \frac{1}{w} \frac{1}{1 + \frac{2}{w}} = \frac{1}{w} \frac{1}{1 - (-\frac{2}{w})} \\ &= \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{w^{n+1}} \end{aligned}$$

נגזור איבר איבר כדי לקבל

$$-\frac{1}{(w+2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-n-1) \frac{2^n}{w^{n+2}}$$

ולכן

$$\frac{1}{(w+2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{2^n}{w^{n+2}}$$

$$\frac{1}{(w+2)^2 w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{2^n}{w^{n+3}}$$

(ב) הטבעת $0 < |z-2| < 2$
פתרון: כאן צריך לפתח

$$\frac{1}{(w+2)^2 w}$$

בטבעת $0 < |w| < 2$. שוב אפשר להתמקד רק ב

$$\frac{1}{(w+2)^2}$$

אבל זאת פונקציה אנליטית בטבעת זו ולכן יש טור טיילור רגיל

$$\frac{1}{w+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^n}{2^{n+1}}$$

ולכן שוב ע"י גזירה איבר איבר

$$\frac{1}{(w+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \frac{w^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \frac{w^n}{2^{n+1}}$$

ו

$$\frac{1}{(w+2)^2 w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \frac{w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

3. מצאו את החלק העיקרי (דהיינו החלק עם חזקות שליליות) של טור לורן של הפונקציה

$$\frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2}$$

סביב הנקודה $z_0 = 3i$
פתרון:

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2(z-3i)^2}$$

נשים לב שבסביבת $3i$ הפונקציה

$$g(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2}$$

היא אנליטית ולכן טור לורן שלה הוא טור טיילור

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-3i)^n$$

ולכן

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-3i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-3i)^{n-2}$$

כלומר החלק העיקרי הוא

$$a_0(z-3i)^{-2} + a_1(z-3i)^{-1}$$

אבל כידוע,

$$a_0 = g(3i) \quad a_1 = g'(3i)$$

כלומר

$$a_0 = \frac{3ie^{-3}}{(6i)^2} = \frac{3i}{e^3(-36)} = -\frac{i}{12e^3}$$

כמו כן,

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{(e^{iz} + ize^{iz})(z+3i)^2 - 2(z+3i)(ze^{iz})}{(z+3i)^4} \\ &= e^{iz} \frac{(1+iz)(z+3i) - 2z}{(z+3i)^3} \end{aligned}$$

ולכן

$$g'(3i) = \frac{1}{e^3} \frac{(-2)(6i) - 6i}{(6i)^3} = \frac{1}{e^3} \frac{-3}{-36} = \frac{1}{12e^3}$$

כלומר החלק העיקרי הוא:

$$-\frac{i}{12e^3}(z-3i)^{-2} + \frac{1}{12e^3}(z-3i)^{-1}$$

4. הראו כי אם ל f קוטב ב z_0 ול g יש סינגולריות עיקרית ב z_0 אז ל $f+g$ יש סינגולריות עיקרית ב z_0 .

פתרון: די טריויאלי מהסתכלות על טור לורן סביב z_0 . החלק העיקרי של טור לורן של f הוא סופי והחלק העיקרי של טור לורן של g הוא אינסופי ולכן החלק העיקרי של טור לורן של $f+g$ יהיה אינסופי גם כן ולכן זו תהיה סינגולריות עיקרית.

5. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות מכוונות נגד כיוון השעון):

$$\int_{|z|=3} \frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} dz \quad (\text{א})$$

פתרון: נזכור ש

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ולכן

$$e^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{z^2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n}$$

$$\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n+3}$$

הסינגולריות היחידה היא 0 והשארתית בה מתקבלת כאשר $n = 2$ כלומר

$$\text{Res}\left(\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}, 0\right) = \frac{(-1)^2}{2!} = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$\int_{|z|=3} \frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$$

$$\int_{|z|=2} \frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6} dz \quad (\text{ב})$$

פתרון: בתוך התחום יש סינגולריות אחת שהיא $z = 1$ וזהו כמובן קוטב מסדר 6. נשתמש בנוסחה

$$\text{Res}\left(\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}, 1\right) = \frac{1}{5!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^5}{dz^5} \left(\frac{z^6}{(z-3)}\right)$$

נבצע חישוב לפי לייבניץ

$$\begin{aligned} \frac{d^5}{dz^5} \frac{z^6}{(z-3)} &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \frac{d^k}{dz^k} ((z-3)^{-1}) \frac{d^{5-k}}{dz^{5-k}} (z^6) = \\ &= (z-3)^{-1} 720z + 5 \cdot (-(z-3)^{-2}) \cdot 360z^2 + 10 \cdot 2(z-3)^{-3} \cdot 120z^3 \\ &+ 10 \cdot (-6(z-3)^{-4}) \cdot 30z^4 + 5 \cdot 24(z-3)^{-5} \cdot 6z^5 - 120(z-3)^{-6} \cdot z^6 \end{aligned}$$

נציב $z = 1$ ונקבל:

$$-\frac{720}{2} - \frac{5 \cdot 360}{4} - \frac{20 \cdot 120}{8} - \frac{60 \cdot 30}{16} - \frac{30 \cdot 24}{32} - \frac{120}{64}$$

ולכן

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}, 1\right) = \frac{1}{5!} \left(-\frac{720}{2} - \frac{5 \cdot 360}{4} - \frac{20 \cdot 120}{8} - \frac{60 \cdot 30}{16} - \frac{30 \cdot 24}{32} - \frac{120}{64}\right) = -\frac{665}{64}$$

ולכן

$$\int_{|z|=2} \frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6} dz = 2\pi i \frac{-665}{64} = -\pi i \frac{665}{32}$$

$4+4i, 4-4i, -4+4i, -4-4i$ כאשר γ הוא הריבוע שקודקודיו $z = \pm\pi, z = 0$. שאר הסינגולריות

פתרון: בתוך התחום יש כמה סינגולריות. כל הסינגולריות הן קטבים מסדר 1 (כי הן אפסים מסדר 1 של $\sin z$).

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1+z}{\sin z}, 0\right) = \frac{1+0}{\cos 0} = 1$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1+z}{\sin z}, \pi\right) = \frac{1+\pi}{\cos \pi} = -1 - \pi$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1+z}{\sin z}, -\pi\right) = \frac{1-\pi}{\cos -\pi} = -1 + \pi$$

ולכן סכום הסינגולריות הוא -1 ולכן

$$\int_{\gamma} \frac{1+z}{\sin z} dz = -2\pi i$$

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2(e^z-1)} dz \quad (\text{ד})$$

פתרון: יש נקודת סינגולריות אחת ב $z_0 = 0$. צריך להבין מה השארית שם. נזכור כי 0 הוא אפס מסדר 1 של $e^z - 1$ ולכן הוא קוטב מסדר 3 של

$$\frac{1}{z^2(e^z-1)}$$

ננסה להבין מה השארית בטור לורן. קודם נבין כמה איברים בטור לורן של

$$\frac{1}{(e^z-1)} = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

$$1 = \left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots\right)(e^z - 1) = \left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots\right)\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots\right)$$

נבצע השוואת מקדמים: עבור z^0 :

$$1 = a_{-1}$$

עבור z^1 :

$$0 = \frac{a_{-1}}{2} + a_0$$

כלומר

$$a_0 = -\frac{1}{2}$$

עבור z^2 :

$$0 = \frac{a_{-1}}{6} + \frac{a_0}{2} + a_1$$

כלומר

$$a_1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

זה מספיק כי מכאן ברור ש

$$\frac{1}{z^2(e^z - 1)} = \frac{1}{z^3} + \frac{-\frac{1}{2}}{z^2} + \frac{\frac{1}{12}}{z} + \dots$$

ולכן השארית היא $\frac{1}{12}$ והאינטגרל שווה ל

$$\frac{\pi i}{6}$$