בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ו סמסטר קיץ מועד ב

מרצים: ד"ר ארז שיינר וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

שימו לב: כל שאלה שווה 23 נקודות, לכן יש סה"כ **115** נקודות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

ציון:

בהצלחה

שאלה 1

סעיף א (12 נקודות)

נסמן ב A את קבוצת כל הפונקציות מ $\{1,2\}$ ל $\{1,2\}$ ונגדיר על A יחס R כך:
לכל $f,g\in A$, $(f,g)\in R$ אם $f(1)-f(2)=g(1)-g(2)$.
הוכיחו כי R הוא יחס שקילות ותארו את החלוקה של A המוגדרת על ידי R.
(רשמו את כל הפונקציות בכל אחת מהמחלקות של החלוקה).

סעיף ב (11 נקודות)

יהיו A,B,C קבוצות סופיות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

i. אם $A\setminus B\subseteq B\setminus C$ אז $A\subseteq B$.
ii. אם $(B\setminus C)^c\subseteq(A\setminus B)^c$ אז $C^c\subseteq B^c$.
iii. מספר הפונקציות מ A ל $P(B)$ שווה למספר הפונקציות מ B ל $P(A)$.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

דף נוסף לשאלה מספר ___________________

שאלה 2

תהי A קבוצת כל הפונקציות מ $\{1,2,3\}$ ל $\{1,2,3\}$. נגדיר על A יחסים R ו S כך:

לכל $f,g\in A$, $(f,g)\in R$ אם $f^{-1}\left[\{1,2\}\right]=g^{-1}\left[\{1,2\}\right]$

ו $(f,g)\in S$ אם $f(i)\leq g(i)$ לכל $1\leq i\leq 3$.

א. הוכיחו כי R הוא יחס שקילות ומצאו את כל איברי מחלקת השקילות של הפונקציה f המקיימת $f(1)=1, f(2)=f(3)=2$.

ב. מצאו את מספר מחלקות השקילות של R ומצאו מחלקה עם איבר אחד.

ג. הוכיחו כי S יחס סדר חלקי וכי קיים ב A איבר קטן ביותר m .

ד. מצאו את כל האיבריים המינימליים בקבוצה $A\setminus\{m\}$, לפי יחס הסדר S .

דף נוסף לשאלה מספר ___________________

שאלה 3

נגדיר $S=\{R \mid R$ הוא יחס שקילות על $\mathbb{N}\}$.

א. (5 נק') הוכיחו כי $|S|\le א$.

הדרכה: אין צורך לבנות פונקציה.

תהיי $A=\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ ותהיי J קבוצת כל החלוקות D של $\mathbb{N}$ כך ש $|D|=2$.

ב. (10 נק') מצאו פונקציה <u>חח"ע</u> $f:P(A)\to J$, הוכיחו.

ג. (8 נק') הוכיחו כי $|J|=א$.

דף נוסף לשאלה מספר ____________________

שאלה 4

סעיף א (16 נקודות)

תהי I כך ש $|I|\le\aleph_0$ ויהי אוסף קבוצות $\{A_i\}_{i\in I}$ כך ש $\forall i\in I:|A_i|\le\aleph_0$.
הוכיחו כי $\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|\le\aleph_0$.

סעיף ב (7 נקודות)

נביט בקבוצה $A=\{x\in\mathbb{R}\mid\exists n\in\mathbb{N}:x^n\in\mathbb{N}\}$. חשבו את $|A|$, הוכיחו.

דף נוסף לשאלה מספר ____________________

שאלה 5

סעיף א (10 נקודות)
יהי גרף G עם קבוצת הקודקודים V.
תהיינה שתי קבוצות קודקודים A,B כך ש $A\cup B=V$ וגם $A\cap B=\phi$.
יהיו שני קודקודים $v\in A,w\in B$ המחוברים בקשת, ונניח כי פרט אליה
אין קשתות בין קודקודים מ A אל קודקודים מ B.
הוכיחו כי קיים קודקוד בעל דרגה אי זוגית ב G.

סעיף ב (13 נקודות)
יהי גרף קשיר G עם $3\leq n$ קודקודים, המכיל מעגל אחד בדיוק
(כלומר, כל מעגל בגרף מכיל את אותם הקודקודים, ואותן הצלעות).
הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת שכמות הצלעות ב G היא n.

דף נוסף לשאלה מספר ________________

דף נוסף לשאלה מספר ___________________