

תרגיל 6 – אלגברה מופשטת 1

1. הוכיחו את הסעיפים הבאים:

$$1.1. \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_7.$$

$$1.2. \text{ לכל שדה } F, GL_n(F)/SL_n(F) \cong F^*.$$

$$1.3. \text{ כאשר } R, Z \text{ הם הממשיים והשלמים עם פעולת החיבור, } R/Z \cong T \text{ בהתאמה } T = \{z : |z|=1\}.$$

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. במקרים בהם הטענה נכונה מצאו הומומורפיזם מתאים ואת הגרעין שלו.

2.1. קיים אפימורפיזם מהחבורה S_{14} לחבורה מסדר 34.

2.2. קיים אפימורפיזם $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{60}$.

2.3. קיים אפימורפיזם $\varphi: \mathbb{Z}_{60} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$.

2.4. קיים איזומורפיזם $\varphi: D_6 \rightarrow U_{13}$.

2.5. קיים מונומורפיזם $\varphi: \mathbb{Z}_{24} \rightarrow S_4$.

3. ענו על הסעיפים הבאים:

3.1. תהי $H \leq G$. הראו ש- $Z(H) \cap Z(G) \subseteq Z(H)$, ותנו דוגמה שבה זו הכלה אמיתית.

3.2. בכל סעיף תנו דוגמה לחבורה G ולתת חבורה $H \leq G$ המדגימה את הדרוש:

$$1. Z(H) \subset Z(G) \text{ (הכלה ממש)}$$

$$2. Z(G) \subset Z(H)$$

$$3. Z(H) \text{ אינו מוכל ב-} Z(G) \text{ ואינו מכיל אותו.}$$

4. הוכיחו כי אם $N \triangleleft G$ אזי $Z(N) \triangleleft G$.

5. ענו על הסעיפים הבאים:

5.1. תהי G חבורה עם תת חבורה H ותת-חבורות נורמליות N, N' . הוכיחו:

$$\text{אם } N \cap H = N' \cap H \text{ אזי } (HN)/N \cong (HN')/N.$$

5.2. תהי G חבורה ו- $N \triangleleft G$. נניח ש- G/N ו- N אבליות. תהי $H \leq G$ תת חבורה כלשהי. הוכיחו שקיימת $H \triangleleft K$, כך ש- H/K ו- K אבליות.

6. ענו על הסעיפים הבאים.

6.1. תנו דוגמה נגדית לטענה השגויה הבאה: אם $A, B \triangleleft G$, ו- $G/A \cong B$ אזי

$$G/B \cong A$$

6.2. נניח $K \triangleleft G$ ו- $G/K \cong Z$. הוכיחו שלכל $n \in N$ קיימת ב- G תת חבורה מאינדקס n .

7. תהי G חבורה (לא בהכרח סופית) ותהיינה $A, B \triangleleft G$. הוכיחו או הפריכו:

7.1. $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A = B$.

7.2. $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A \cong B$.

7.3. אם $G \cong G/A$ אזי A היא תת-החבורה הטריטיואלית.

בהצלחה! 😊