

תרגיל בית 3 - טופולוגיה

שאלה 1

יהי (X, d) מ"מ.

א. הוכיחו כי לכל $x \in X$, תת קבוצה סגורה של X .

ב. הסיקו כי כל תת קבוצה סופית של X סגורה.

שאלה 2

א. הוכיחו ש- \mathbb{Q} אינה סגורה ואינה פתוחה ב- \mathbb{R} .

ב. הוכיחו: כל מישור ב- \mathbb{R}^3 הוא סגור.

ג. הוכיחו: הקבוצה $B = \{(x, y, z) \mid 3e^x - 35y^5 < 17y + z^2\}$ הינה פתוחה ב- \mathbb{R}^3 .

ד. יהי $M_n(\mathbb{R})$ המרחב המטרי של המטריצות הריבועיות $n \times n$ עם מקדמים ממשיים (זהו המרחב המטרי $\mathbb{R}^{n \times n}$ עם המטריקה האוקלידית). הוכיחו שקבוצת המטריצות ההפיכות $GL_n(\mathbb{R})$ פתוחה במרחב זה.

שאלה 3

א. אילו מהמטריקות הבאות שקולות מעל \mathbb{Z} : d_Δ (מטריקת 0-1), d_7 (המטריקה ה-7 אדית), d_5 (המטריקה ה-5 אדית) והמטריקה הסטנדרטית d המוגדרת ע"י $d(x, y) = |x - y|$ (הוכיחו את תשובתכם!).

ב. תהי $S = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$. נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות:

$$\rho((a_n), (b_n)) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}, \quad d((a_n), (b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

או הפריכו: שתי המטריקות הן שקולות.

שאלה 4

- א.** יהיו d_1, d_2 מטריקות שקולות מעל X . יהיו ρ_1, ρ_2 מטריקות שקולות מעל Y .
נניח ש- $f: (X, d_1) \rightarrow (Y, \rho_1)$ רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה
 $f: (X, d_2) \rightarrow (Y, \rho_2)$ רציפה.
- ב.** יהיו d_1, d_2 מטריקות כלשהן מעל X . יהיו ρ_1, ρ_2 מטריקות כלשהן מעל Y . נניח
ש- $f: (X, d_1) \rightarrow (Y, \rho_1)$ רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה
 $f: (X, d_2) \rightarrow (Y, \rho_2)$ רציפה.

שאלה 5

- תהי $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים.
- א.** הוכיחו: רציפה אמ"מ $f^{-1}(O)$ פתוחה ב- X לכל כדור פתוח $O \subseteq Y$.
- ב.** הראו שהטענה האנלוגית עבור כדורים סגורים אינה נכונה. כלומר, מצאו שני
מרחבים מטריים ופונקציה ביניהם $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$, כך ש- f אינה רציפה
למרות שכן מתקיים התנאי הבא: $f^{-1}(B)$ סגורה ב- X לכל כדור סגור
 $B \subseteq Y$.

שאלה 6

- נגדיר פונקציה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ באופן הבא: $f(x) = \begin{cases} 1 & xy = 0 \\ 2 & xy \neq 0 \end{cases}$. נסמן ב- S את אוסף
כל הנקודות בהן f רציפה. מצאו את S וקבעו האם היא פתוחה או סגורה ב- \mathbb{R}^2 .

בהצלחה!