פתרון תרגיל בית 3 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ח

(הערה: טרם הגדרנו באופן פורמלי מה זה חבורות איזומורפיות. לעת עתה נעבוד עם ההגדרה האינטואיטיבית שחבורות הן איזומורפיות אם הן נראות בדיוק אותו דבר. בתרגילים הרלוונטיים, על מנת להוכיח ששתי חבורות הן לא איזומורפיות, מצאו שתכונה שמתקיימת באחת ולא בשניה. למשל: בחבורה אחת קיים מסדר k, ובחבורה השניה לא. חבורה אחת היא ציקלית והאחרת לא. וכו')

שאלה 1. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה ואם לא מצא דוגמא נגדית:

1. כל חבורה צקלית היא אבלית.
2. כל חבורה אבלית היא צקלית.
3. תת חבורה הנוצרת ע"י איבר אחד היא תמיד צקלית.
4. אם $o(a)=n$ אז $a^{-1}=a^{n-1}$.

פתרון. כן, לא (למשל $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$) , כן, כן.

שאלה 2. חשבו את סדר החבורות (כלומר, מספר האיברים בחבורה) $U_{12}, U_{14}, H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_3 \right\}$

פתרון. הסדרים הם *4,6,27*.

שאלה 3. רשמו את לוחות הכפל של U_5, U_8.

פתרון. $U_5=\mathbb{Z}_5^*=\mathbb{Z}_5-\{0\}$
עבור U_8:

7	5	3	1	
7	5	3	1	1
5	7	1	3	3
3	1	7	5	5
1	3	5	7	7

פתרו את המשוואות הבאות:

1. $22x = 1$ ב-$\mathbb{Z}_{117}$.
2. $-11x + 2 = 19$ ב-$\mathbb{Z}_{24}$.

פתרון.

1. *זה בעצם לשאול מי ההופכי של 22 בחבורה $\mathbb{Z}_{117}$. נחשב*

$$\begin{aligned} 117 &= 5 \cdot 22 + 7 \\ 22 &= 3 \cdot 7 + 1 \\ 7 &= 7 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

ולכן הממ"מ הוא 1. נציב לאחור ונקבל

$$1 = 22 - 3 \cdot 7 = 22 - 3(117 - 5 \cdot 22) = 16 \cdot 22 + (-3)117$$

ולכן ההופכי שלו הוא 16.

2. *נסדר את המשוואה $-11x = 17$ כעת נכפול ב-11 (שהוא הופכי של -11 לפי החישוב בהמשך) את שני האגפים ונקבל $x = -11 \cdot 17 = -19$.*
החישוב שצריך לעשות הוא:

$$\begin{aligned} 24 &= (-2) \cdot (-11) + 2 \\ -11 &= (-5) \cdot 2 - 1 \\ 2 &= (-2) \cdot (-1) + 0 \end{aligned}$$

ולכן הממ"מ הוא $|-1| = 1$. נציב לאחור ונקבל:

$$1 = -(-11) - 5 \cdot 2 = -(-11) - 5(24 - 2 \cdot 11) = -11 \cdot (-11) + (-5) \cdot 24$$

ולכן ההופכי שלו הוא -11.

שאלה 4. תהי G חבורה ויהיו $a,b\in G$ איברים. הוכיחו כי $o(ab)=o(ba)$.
היזהרו: לא הנחנו שהחבורה אבלית!

פתרון. נסמן $o(ab)=n$. נשים לב ש $(ab)^{-1}=(ab)^{n-1}$.
כעת

$$\begin{aligned}(ba)^n &= baba\dots ba = b(ab)(ab)\cdots(ab)a = b(ab)^{n-1}a = \\ &= b(ab)^{-1}a = bb^{-1}a^{-1}a = e\end{aligned}$$

ולכן $o(ba)|n$.
באופן סימטרי אפשר להראות ש $n|o(ba)$.

שאלה 5. תהי $G=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ חבורה אבלית. נסמן $b=a_1a_2\cdots a_n$.
הוכיחו כי $b^2=e$.

1. כיוון ש G אבלית, לא משנה סדר המכפלה של האיברים בb^2. נשים לב שבb^2 כל איבר בחבורה מופיע פעמיים. נסדר את המכפלות כך של איבר יהיה ליד ההופכי שלו $b^2=a_1a_1^{-1}a_2a_2^{-1}\cdots a_na_n^{-1}$. ואז קל לראות ש $b^2=e$.

שאלה 6. הוכיחו כי $U_8\ncong\mathbb{Z}_4$ (העזרו בסדר של איברים).

פתרון. אפשר לחשב שהסדר של כל איבר בU_8 הוא מסדר לכל היותר 2 *ואילו $\mathbb{Z}_4$ ציקלית ולכן יש בה איבר מסדר 4 . ולכן החבורות לא יכולות להיות איזומורפיות.*

שאלה 7. בשאלה הקודמת ראינו שסדר האיברים יכול להראות לנו שחבורות הן לא איזומורפיות. כעת נראה שההפך לא נכון, יש חבורות אם איברים באותם סדרים שהן לא איזומורפיות.

1. הוכיחו כי בחבורת הייזנברג מודולו 3

$$H=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\ |\ a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}\le GL_3(\mathbb{Z}_3)$$

כל האיברים (פרט ליחידה) הם מסדר 3.

2. הוכיחו כי ב$\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ כל האיברים (פרט ליחידה) הם מסדר 3.

3. הראו כי $H\ncong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$.

פתרון. 1. ניקח מטריצה ונשב את הסדר שלה $\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&3a&3b+3ac\\0&1&3c\\0&0&1\end{pmatrix}=$
I.

2. חישוב פשוט.

3. החבורות לא איזומורפיות כי H איננה אבלית ואילו המכפלה $\mathbb{Z}_3^3$ כן.

שאלה 8. היזכרו בשאלה 5 של תרגיל בית 1, הוכיחו כי בחבורה מסדר זוגי מספר האיברים מסדר 2 הוא אי-זוגי.

פתרון. בתרגיל ההוא הראיתם שמספר האיברים המקיימים $x^2 = e$ הוא זוגי.
נשים לב שעבור כל איבר המקיים את התכונה הזאת, מתקיים $o(x)|2$ כלומר ש $o(x) = 1, 2$.
איבר היחידה הוא היחיד מסדר *1 ולכן נוריד אותו מהספירה, נשארנו עם מפר אי-זוגי של איברים מסדר 2.*

בהצלחה!