תרגול 13 - דטרמיננטה ומטריצה נלווית

18 באוגוסט 2020

.1

(א) תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו: $|AB| = |BA|$.
פתרון: כיון שהדטרמיננטה כפלית נקבל:

$$|AB| = |A|\cdot|B| \underset{*}{=} |B|\cdot|A| = |BA|$$

כאשר שיוויון $*$ נובע מכך שמדובר בכפל בשדה, שהוא חילופי.

(ב) תהיינה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$. הוכיחו או הפריכו: $|AB| = |BA|$.
פתרון: נשים לב שעבור $m \neq n$ המטריצות לא ריבועיות ולכן $|A|, |B|$ לא מוגדר. עוד נשים לב ש- $AB \in \mathbb{F}^{m\times m}, BA \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הפרכה: בתרגול על הפיכות ראינו דוגמא למטריצות $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}, B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ כך ש- $AB = I_2$, ולכן $|AB| = 1$, אבל $rank(BA) \leq rank(B), rank(A) \leq 2 < 3$, וכיון ש- $BA \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ והדרגה קטנה מ-3 נקבל ש- BA לא הפיכה ו- $|BA| = 0$.

2. יהי n אי־זוגי, ותהיינה $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימות: $AB + BA = 0$. הוכיחו: A לא הפיכה או B לא הפיכה.
נקבל $AB = -BA$ ולכן:

$$|AB| = |-BA| = (-1)^n|BA| \underset{*}{=} -|AB|$$

ולכן $|AB| = 0$, ומכאן ש- AB לא הפיכה ולכן A לא הפיכה או B לא הפיכה.
שיוויון $*$ נובע מתרגיל 1 ומכך ש-n אי־זוגי.

3. תהא $A \in \mathbb{R}^{5780\times 5780}$ הפיכה המקיימת $A^5 + 2A = 0$. מצאו את $|A|$.
פתרון: נקבל $A^5 = -2A$ ולכן $|A^5| = |A|^5 = (-2)^{5780}|A|$, אפשר לחלק ב-$|A|$ כי היא הפיכה ולקבל:

$$|A|^4 = (-2)^{5780} = 2^{5780} \Rightarrow |A| = 2^{1445}$$

4. עבור $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ נגדיר את מטריצת ונדרמונד $V_{(a_1,\ldots a_n)}\in\mathbb{F}^{n\times n}$ התלויה בהם ע"י:

$$V_{i,j}=a_i^{j-1}$$

או בצורה מפורשת:

$$V=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

מצאו את $|V|$, והסיקו מתי V הפיכה.

פתרון: כיון שדטרמיננטה נשמרת תחת שחלוף, ניתן לבצע פעולות עמודה ולהתייחס אליהן כפעולות אלמנטריות.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[C_i-a_1C_{i-1}]{\forall i>1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1a_2 & \cdots & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n-a_1 & a_n^2-a_1a_n & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

נפתח את הדטרמיננטה לפי שורה ראשונה ונקבל:

$$|V|=\left|\begin{pmatrix} a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & a_2^2(a_2-a_1) & \ldots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & \ldots & a_3^{n-2}(a_3-a_1) \\ \vdots & & & & \\ a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & & & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{pmatrix}\right|=$$

$$=\prod_{i=2}^{n}(a_i-a_1)\cdot\left|\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-2} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & & & a_n^{n-2} \end{pmatrix}\right|=\prod_{i=2}^{n}(a_i-a_1)\cdot|V_{(a_2,\ldots,a_n)}|$$

אחרי שהגענו לכאן, נשים לב שניתן להוכיח באינדוקציה שמתקיים: $|V_{(a_1,\ldots,a_n)}|=\prod_{i<j}(a_j-a_i)$. הוכחה:

בסיס: $\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1$.

נניח נכונות ל־$n-1$ ונכייח עבור n. בתחילת הפתרון הגענו לכך ש־

$$|V_{(a_1,\ldots,a_n)}|=\prod_{i=2}^{n}(a_i-a_1)\cdot|V_{(a_2,\ldots,a_n)}|$$

כיוון ש- $V_{(a_2,\dots,a_n)} \in \mathbb{F}^{n-1\times n-1}$ נקבל מהנחת האינדוקציה: $|V_{(a_2,\dots,a_n)}| = \prod_{1<i<j}(a_j-a_i)$, ומכאן:

$$|V_{(a_1,\dots,a_n)}| = \prod_{i=2}^{n}(a_i-a_1)\cdot\prod_{1<i<j}(a_j-a_i) = \prod_{i<j}(a_j-a_i)$$

נקבל: V הפיכה אמ"ם $\forall i\neq j : a_i \neq a_j$.

5. חשבו את $adj(A)$ עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

פתרון: מתקיים: $adj(A)_{i,j} = (-1)^{i+j}\cdot|M_{j,i}|$. ולכן:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

6. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו:

(א) $|adj(A)| = |A|^{n-1}$.
בהרצאה.

(ב) אם A הפיכה אז: $adj(adj(A)) = |A|^{n-2}\cdot A$. (ומה אם A לא הפיכה? היעזרו בשאלה 8!)
פתרון: מתקיים: $adj(A)\cdot A = A\cdot adj(A) = |A|\cdot I$, ומסקנה: אם A הפיכה אז $adj(A) = |A|\cdot A^{-1}$. נישם את המסקנה על $B = adj(A)$:

$$adj(adj(A)) = |adj(A)|\cdot(adj(A))^{-1} = |A|^{n-1}\cdot(adj(A))^{-1} =$$

כעת, מהעובדה ש- $(|A|\cdot A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A$ נוכל להמשיך:

$$= |A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A$$

7. תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. מצאו מטריצה $B\neq 0$ כך ש- $AB = 0 = BA$.

פתרון: חישבנו את $adj(A)$ וראינו שאיננה אפס, לכן נוכל לקחת $B = adj(A)$ ולקבל

מהמשפט לעיל:

$$AB = BA = |A|I = 0I = 0$$

8. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו:

$$rank(adj(A)) = \begin{cases} n & rank(A) = n \\ 1 & rank(A) = n-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

פתרון: אם $rank(A) = n$ אז A הפיכה ולכן גם $adj(A)$ הפיכה (למשל מתרגיל 6, שם ראינו שהדטרמיננטה שלה שונה מאפס).
אם $rank(A) < n-1$, אז כל $n-1$ שורות ועמודות הן ת"ל (וגם כאשר "חותכים" שורה של n רכיבים להיות $n-1$ רכיבים, וכנ"ל בעמוודות, התלות נשארת), ולכן לכל i,j מתקיים: $|M_{j,i}| = 0$ ולכן $\forall i,j : adj(A)_{i,j} = 0$. כלומר, $adj(A) = 0$ ולכן גם $rank(adj(A)) = 0$.
אם $rank(A) = n-1$. ראינו בעבר שיש תת מטריצה ריבועית מסדר הדרגה שהיא הפיכה (פשוט לוקחים את $n-1$ השורות הבת"ל, ומקבלים מטריצה בת"ל, ושם יש $n-1$ עמודות בת"ל, וביחד קיבלנו ריבועית הפיכה). תת־מטריצה זו היא בעצם מינור $M_{j,i}$ עבור i,j מתאימים, ולכן $adj(A)_{i,j} = (-1)^{i+j}|M_{j,i}| \neq 0$, ולכן $adj(A) \neq 0$ כלומר $rank(adj(A)) \geq 1$. מצד שני, נשים לב שמהעובדה $adj(A)A = 0$ נקבל $C(A) \subseteq N(adj(A))$, ולכן $\dim(N(adj(A)) \geq n-1 \Rightarrow rank(adj(A)) \leq 1$.
בסה"כ: $rank(adj(A)) = 1$.
מסקנה: עבור $n > 2$ אם A לא הפיכה אז $adj(adj(A)) = 0$.
לגבי $n = 2$: נשים לב שעבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ נקבל $adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ואז $adj(adj(A)) = A$.

9. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה.

   (א) אם איברי A ואיברי A^{-1} שלמים, אז $|A|^{5780} = 1$.
   פתרון: נראה ש־ $|A| = \pm 1$. נקבל $|A|, |A^{-1}| \in \mathbb{Z}$, בנוסף:

   $$1 = |I| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$$

   קיבלנו מכפלה של שני שלמים שתוצאתה 1, ולכן הם ± 1.

   (ב) אם איברי A רציונאליים אז גם איברי A^{-1} רציונאליים.

10. יהי V מ"ו ויהיו $v_1, \ldots, v_n$ בת"ל. הוכיחו או הפריכו: $v_1 + v_2, v_2 + v_3 \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$ בת"ל.