מבוא לאנליזה מתקדמת תרגול 11

12 בינואר 2021

1 מד"ר פרידה

מד"ר פרידה היא מהצורה

$$y' = f(y)g(x)$$

ואז נרשום:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$$

$$\frac{1}{f(y)}dy = g(x)dx$$

ואז עושים אינטגרל בשני הצדדים ומקבלים את הפתרון.

תרגילים:

1. פתרו:

$$y' = (y-1)^2$$

פתרון: אצלנו $f(y) = (y-1)^2, g(x) = 1$, ולכן נקבל:

$$\int \frac{1}{f(y)}dy = \int g(x)dx$$

כלומר:

$$\int \frac{1}{(y-1)^2}dy = \int 1dx$$

מצד שמאל נקבל:

$$\int \frac{1}{(y-1)^2}dy = -\frac{1}{y-1}$$

מצד ימין:

$$\int 1dx = x + c$$

ולכן נקבל:

$$-\frac{1}{y-1} = x + c$$

אפשר כאן לחלץ את y:

$$y = -\frac{1}{x+c} + 1$$

כאשר פתרון סינגולרי הוא:

$$y = 1$$

2. מצאו פתרונות פרטיים של אותה מד"ר, המקיימים:

(א) $y(0) = 1$

(ב) $y(2) = 2$

פתרון: א. כיון ש- $y(0) = 1$ אז מדובר בפתרון הסינגורלי, ולכן הפתרון הפרטי הוא $y = 1$.

ב. כאן פשוט מציבים:

$$2 = -\frac{1}{2+c} + 1$$

$$4 + 2c = -1 + 2 + c$$

$$c = -3$$

ולכן הפתרון הוא:

$$y = -\frac{1}{x-3} + 1$$

3. פתרו את המד"ר: $y' = e^{x+y+1}$.

כאן נוכל לרשום $y' = e^x e^{y+1}$ ואז $f(y) = e^{y+1}, g(x) = e^x$ ונקבל:

$$\int \frac{1}{e^{y+1}} dy = \int e^x dx$$

נקבל משמאל:

$$\int e^{-(y+1)}dy = -e^{-(y+1)}$$

מימין:

$$\int e^{x}dx = e^{x}+c$$

ולכן בסה"כ:

$$-e^{-(y+1)} = e^{x}+c$$

אפשר להעביר ל

$$e^{-(y+1)} = -e^{x}+c$$

נוציא $\ln$ על שני האגפים:

$$-y-1 = \ln\left(-e^{x}+c\right)$$

$$y = -1-\ln\left(-e^{x}+c\right)$$

2 מד"ר לינארית הומוגנית מסדר שני

מדברים על מד"ר מהצורה:

$$y''+by'+cy=0$$

נרשום פולינום אופייני למד"ר:

$$t^{2}+bt+c$$

כאן יש שלש אפשרויות:

- דסקרמיננטה חיובית, אז נקבל שניי שורשים t_1, t_2, ואז הפתרון הוא מהצורה:

$$y = c_1e^{t_1x}+c_2e^{t_2x}$$

- דסקרמיננטה שלילית, אז נקבל שני שורשים מרוכבים: $z = a + bi, \overline{z} = a - bi$, ואז הפתרון הוא מהצורה:

$$y = c_1 e^{ax}\cos(bx) + c_2 e^{ax}\sin(bx)$$

- דססקרמיננטה מתאפסת, אז נקבל שורש כפול t, ואז הפתרון הוא מהצורה:

$$y = c_1 e^{tx} + c_2 x e^{tx}$$

תרגילים:

1. מצאו פתרון פרטי למד"ר $y'' - 3y' - 4y = 0$ המקיים $y(0) = y(1) = 1$.
   פתרון: הפולינום האופייני הוא:

$$t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1)$$

השורים הם $4, -1$, ולכן הפתרון יהיה מהצורה:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$$

נציב תנאי התחלה:

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + c_2 \\ 1 = y(1) = c_1 e^4 + c_2 e^{-1} \end{cases}$$

בשיטת הבידוד והצבה נקבל:

$$1 = c_1 e^4 + (1 - c_1)e^{-1} = c_1(e^4 - e^{-1}) + e^{-1}$$

$$c_1 = \frac{1 - e^{-1}}{e^4 - e^{-1}}$$

$$c_2 = 1 - \frac{1 - e^{-1}}{e^4 - e^{-1}} = \frac{e^4 - 1}{e^4 - e^{-1}}$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = \frac{1 - e^{-1}}{e^4 - e^{-1}} e^{4x} + \frac{e^4 - 1}{e^4 - e^{-1}} e^{-x}$$

2. מצאו פתרון פרטי למד"ר $y'' + 2y' + 4y = 0$ המקיים $y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) = 2$
פתרון: הפולינום הוא $t^2 + 2t + 4$ ששרשיו הם:

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

ולכן הפתרון הוא מהצורה:

$$y = c_1 e^{-x} \cos\left(\sqrt{3}x\right) + c_2 e^{-x} \sin\left(\sqrt{3}x\right)$$

נציב תנאי התחלה:

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 2 = c_1 e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \sin\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

מקבלים:

$$c_2 = 2e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = e^{-x} \cos\left(\sqrt{3}x\right) + 2e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - x} \sin\left(\sqrt{3}x\right)$$

3. מצאו פתרון פרטי למד"ר $y'' - 8y' + 16y = 0$ המקיים $y(0) = 0, y(1) = 1$
פתרון: הפולינום הוא $t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2$, נקבל שורש כפול 4, ולכן הפתרון הוא מהצורה:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

נציב תנאי התחלה:

$$\begin{cases} 0 = c_1 \\ 1 = c_2 e^4 \Rightarrow c_2 = e^{-4} \end{cases}$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = e^{-4} x e^{4x} = x e^{4(x-1)}$$