תרגיל תיאורטי 4

7 בפברואר 2017

1. יהיו $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&0\\1&4&1\\1&5&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times3},\ b=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4$. נרצה לפתור את המערכת $Ax=b$ אך למזלנו למערכת זאת אין פתרון (אתם מוזמנים לבדוק...). אז מה כן? נרצה למצוא פתרון מקורב b'. מה זה אומר? נרצה למצוא $b'\in\mathbb{R}^4$ כך ש

   (א) למערכת $Ax=b'$ יש פתרון.

   (ב) הסטיה $b-b'$ מינימאלית כלומר ש $\|b-b'\|$ מינימאלי (כאשר $\|*\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית המוגדרת על $\mathbb{R}^4$)

   מצאו b' כנדרש וחשבו את הסטיה $\|b-b'\|$.
   הדרכה: מצאו תחילה בסיס או"ג ל $C(A)$ והשתמשו בו על מנת להטיל את b על $C(A)$.

   פתרון: ראשית נמצא בסיס למרחב העמודות של A. לשם כך נדרג את A

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&0\\1&4&1\\1&5&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&2&0\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

   כיוון שבכל עמודה יש ציר בצורה המדורגת - עמודת A בת"ל ולכן בסיס ל $C(A)$.
   נמצא בסיס או"ג ל $C(A)$

   נסמן $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ ונפעיל גרם שמידט.

$$
\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \\
w_3 &= = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix} - \frac{6}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{8}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

כלומר $\left\{ w_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ בסיס אורתוגנלי ל $C(A)$.

כעת נגדיר b' להיות ההטלה של $b = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ על $C(A)$ ונחשב לפי מה שראינו בתירגול

$$
b' = \pi_{C(A)}(b) = \sum_{i=1}^{3} \pi_{w_i}(b) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle b, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i
$$

נחשב

$$
\frac{\langle b, w_1\rangle}{||w_1||^2}w_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{\langle b, w_2\rangle}{||w_2||^2}w_2 = \frac{2}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{\langle b, w_3\rangle}{||w_3||^2}w_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}
$$

ונקבל בסופו של דבר

$$
b^{'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix}
$$

כיוון ש $b' \in C(A)$ קיים פתרון למערכת $Ax = b'$. כיוון ש b' הוא ההטלה של b על $C(A)$ נקבל כי

$$
\|b - b'\| = \min_{v \in C(A)} \{\|b - v\|\}
$$

ולכן אם $\tilde{b}$ מקיים שיש פתרון למערכת $Ax = \tilde{b}$ אזי בפרט $\tilde{b} \in C(A)$ ולכן $\|b - \tilde{b}\| \leq \|b - b'\|$. מה שמוכיח כי b' שמצאנו אכן פתרון למערכת. נחשב את הסטיה:

(א)

$$\|b-b^{'}\| = \| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \| = \| \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \| = \frac{1}{4} \| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \| = \frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2}$$

2. יהא V ממ"פ (עם מ"פ $\langle v_1, v_2 \rangle$ונורמה מורשית $\|v\|$) ויהא $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס או"נ הוכיחו כי

(א) לכל $v \in V$ מתקיים כי $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$.
פתרון: הוכחה: יהא $v \in V$ אזי $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ כי B בסיס. ניקח מכפלה פנימית עם v_jמסוים ונקבל כי

$$\langle v, v_j \rangle \overset{(1)}{=} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle \overset{(3)}{=} \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle \overset{(4)}{=} \alpha_j$$

כאשר (1) זה הסימון. (2) בגלל שמכפלה פנימית לינארית ברכיב הראשון. $(3) + (4)$ נובע מהנתון ש B קבוצה או"ג.
ולכן

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$$

(ב) לכל צירוף לינארי $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ של איברי Bמתקיים $\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$
פתרון: ההוכחה:

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \|^2 \overset{(1)}{=} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \right\rangle \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle v_i, v_j \rangle \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i} \langle v_i, v_i \rangle \overset{(4)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i} \overset{(5)}{=} \sum_{i} |\alpha_i|^2$$

כאשר (1) זה הגדרת נורמה מושרית. (2) בגלל שמכפלה פנימית לינארית ברכיב הראשון וכמעט לינארית ברכיב השני. $(3) + (4)$ נובע מהנתון ש B קבוצה או"ג. (5) מתכונות של הצמדה מרוכבת.

3. חשבו את הדטרמינטנה של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

פתרון: המטריצה A היא מטריצת בלוקים

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

ולכן

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right|$$

נחשב

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -10 & -20 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = 0$$

ולכן $|A| = 0$

.4

(א) יהא $\mathbb{R}^n$ ממ"פ עם המכפלה הסקלארית. הוכיחו כי לכל $v, w \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים $\langle Av, w\rangle = \langle v, A^t w\rangle$

פתרון: הוכחה: יהיו $v, w \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אזי

$$\langle Av, w\rangle = (Av)^t w = v^t A^t w = v^t(A^t w) = \left\langle v, A^t w\right\rangle$$

(ב) תהא $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $Q^tQ = I$ (כלומר מטריצה או"ג) ויהא λ ע"ע שלה. הוכיחו כי $\lambda \in \{\pm 1\}$.

הדרכה: הוכיחו כי מתקיים לכל v כי $\langle Qv, Qv\rangle = \langle v, v\rangle$

פתרון: הוכחה: מהנתון נקבל כי קיים $v \neq 0$ המקיים $Qv = \lambda v$ נניח כי v מנורמל (אחרת ניתן לנרמל אותו והוקטור המנורמל יהיה ו"ע של λ גם כן) אזי

$$1 = \langle v, v\rangle = \left\langle Q^tQv, v\right\rangle = \langle Qv, Qv\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2 \langle v, v\rangle = \lambda^2$$

.5 יהיו $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ מספרים מרוכבים. נגדיר מטריצת ונדרמונט להיות

$$V(a_0, \ldots a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ & & & & \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

למשל

$$V(3,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו כי

$$|V(a_0, \ldots a_{n-1})| = \prod_{0\leq i<j\leq n-1} (a_j - a_i)$$

למשל

$$|V(3,2,4)| = (4-2)(4-3)(2-3)$$

הדרכה: בצעו את פעולות העמודה האלמנטריות הבאות לפי הסדר הבא

- $C_n - a_0 C_{n-1} \to C_n$
- $C_{n-1} - a_0 C_{n-2} \to C_{n-1}$
- עד $C_2 - a_0 C_1 \to C_2$

• השתמשו ברקורסיה/אינדוקציה על מנת להגיע לפתרון.

כאשר C_i זה עמודה i של המטריצה (שימו לב שפעולות אלו לא משנות את הדטרמיננטה)

פתרון: אחרי ביצוע פעולות עמודה אלו נקבל כי

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0-a_0 & a_0^2-a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1}-a_0^{n-1} \\ 1 & a_1-a_0 & a_1^2-a_0a_1 & \cdots & a_1^{n-1}-a_0a_1^{n-2} \\ \vdots \\ \\ 1 & a_{n-1}-a_0 & a_{n-1}^2-a_0a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1}-a_0a_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & a_1-a_0 & a_1(a_1-a_0) & \cdots & a_1^{n-} \\ \vdots \\ \\ 1 & a_{n-1}-a_0 & a_{n-1}(a_{n-1}-a_0) & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}$$

והדטר' של שתי המטריצות שוות. נפתח לפי שורה ראשונה ונקבל כי הדטר' שווה ל

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1-a_0 & a_1(a_1-a_0) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1-a_0) \\ \vdots \\ \\ 1 & a_{n-1}-a_0 & a_{n-1}(a_{n-1}-a_0) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_0) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_1-a_0 & a_1(a_1-a_0) & \cdots & a_1^{n} \\ \vdots \\ \\ a_{n-1}-a_0 & a_{n-1}(a_{n-1}-a_0) & \cdots & a_{n-}^{n-} \end{pmatrix}\right.$$

נוציא גורם משותף (a_1-a_0) מהשורה הראשונה , גורם משותף (a_2-a_0) מהשורה השניה וכו' עד שנוציא גורם משותף $(a_{n-1}-a_0)$מהשורה האחרונה. נמשיך ונקבל

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-a_0)\left|\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ \vdots \\ \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}\right| = \prod_{i=1}^{n-1}(a_i-a_0)\left|V(a_1,\dots a_{n-1})\right|$$

לפי הנחת האינדוקציה נמשיך לקבל

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-a_0)\cdot\prod_{1\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)=\prod_{0\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)$$

כנדרש

(ב) הוכיחו כי $a_0,a_1\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$ מספרים שונים אמ"מ המטריצה $V(a_0,\dots a_{n-1})$ הפיכה.

6. תהא $A\in\mathbb{R}^{9\times 9}$ עם דרגה = 5. נתון כי $rank(A-3I)=5$. עוד נתון כי ל A קיים ע"ע ששוה ל - 5 . הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצא את האלכסונית ש A דומה לה.
פתרון : ידוע כי $rank(A)+\dim N(A)=9$ ולכן $\dim N(A)=4$. כלומר הר"ג של ע"ע = 0 הוא 4 ולכן הר"א שלו לפחות 4. משיקולים דומים הר"ג של ע"ע = 3 הוא 4 ולכן הר"א שלו לפחות 4. נתון שיש ע"ע =5 ולכן הר"א שלו לפחות 1.

כיוון שסכום ר"א של הע"ע הוא 9 אזי נקבל כי

ע"ע =0 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 4

ע"ע =3 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 4

ע"ע =5 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 1

לפי משפט A לכסינה והמטריצה האלכסונית הדומה לה היא

$$D = \begin{pmatrix} 0I_4 & & \\ & 3I_3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

כאשר I_4 היא מטריצת היחידה מגודל 4×4.

7. נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

מצאו את הפולניום האופיני של A, ע"ע שלה ומרחבים עצמיים.

פתרון : נחשב

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -2 \\ -\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= \lambda \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \lambda \left| \begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -3 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \lambda\left[(\lambda-2)(\lambda-3)-6\right] = \lambda\left[\lambda^2-5\lambda\right] = \lambda^2(\lambda-5) \end{aligned}$$

ולכן ע"ע הם $0, 5$.

מרחבים עצמיים: עבור $\lambda = 0$

$$N(A-0I) = N(A)$$

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=0} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} |t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $\lambda = 5$

$$N(A-5I) = N(\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 10 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=5} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 3/2t \\ t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

.8

(א) תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ כך שכל שורה של A מסתכמת לאותו מספר שנסמנו λ.
הוכיחו כי λ ע"ע של A.
למשל למטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ יש ערך עצמי 6 כי כל שורה מסתכמת ל 6.
רמז: חישבו מי הו"ע המתאים.

פתרון : נגדיר $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ונחשב Av: לכל $1 \le i \le n$ מתקיים כי

$$(Av)_i = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} v_k = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \overset{(1)}{=} \lambda$$

כאשר (1) נובע מכך ש $\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}$ זה סכום האיברים של שורה i שלפי נתון שווה λ. ומכאן ש

$$Av = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ב) תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מצא מטריצה P או"ג ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP = D$

פתרון : לפי סעיף קודם $\lambda = 3$ הוא ע"ע של A בנוסף רואים כי A אינה הפיכה ולכן יש לה ע"ע 0 (בדרך אחרת: $rank(A) = 1$ ולכן $V_{\lambda=0} = \dim N(A) = 3 - rank(A) = 2$ ע"ע 0 הוא מר"ג 2).

נחשב מרחבים עצמיים $V_{\lambda=0} = N(A)$ · נדרג את A ונמצא בסיס:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=0} = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} ; s,t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

נפכיל גרם שמידט על הבסיס ונקבל

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

בסיס או"ג ננרמל אותו ונקבל

$$\left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{1.5}} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס או"נ ל $V_{\lambda=0}$. כיוון ול 0 יש 2 ו"ע ול 3 יש ו"ע אחד נוסף לפחות נקבל שיש 3 ו"ע וזה יספיקו לנו להמשך.

נחשב $V_{\lambda=3} = N(A - 3I)$ · נדרג את $A - 3I$ ונמצא בסיס:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=3} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} ; s,t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ובסיס או"נ הוא

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נגדיר

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{0.5}{\sqrt{1.5}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{0.5}{\sqrt{1.5}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{1.5}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

מטריצה או"ג (כי עמודותיה וקטורים או"נ) שעמדותיה הם ו"ע של A ולכן

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

9. תזכורת: סדרת פיבונאצי $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ היא הסדרה המוגדרת בצורה רקורסיבית כך:

$$F_0 = 0, F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

מצא נוסחה מפורשת ל F_n
הדרכה:

(א) שימו לב כי מתקיים לכל n

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

(ב) מצאו A כך שייתקיים

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

לכל nטבעי.

(ג) ע"י לכסון A חשבו מפורשות את A^n (אם $A = PDP^{-1}$ אזי ... $A^n =$)

(ד) הסיקו את F_n

פתרון : נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} \cdots = A^k \begin{pmatrix} F_{n-(k-1)} \\ F_{n-k} \end{pmatrix}$$

נבחר $k = n$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נוכיח כי אכן מתקיים לכל n

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

עובר $n=1$ מתקיים. נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח עבור n

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = AA^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

נחשב את A^n בעזרת ליכסון:

$$f_A(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)\,\lambda - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

ומכאן ש

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

נמצא ו"ע. כיוון שחייב להיות ו"ע אזי אפשר לרשום (ניתן גם לבדוק, אם רוצים:))

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ 1-\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הוא וקטור עצמי של λ_1.באופן דומה

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 1 \\ 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ 1-\lambda_2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הוא וקטור עצמי של λ_2. נגדיר

$$P = (v_1, v_2) \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

ואז

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

ולכן

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

ולסיכום

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ -\lambda_2^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} * \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ולכן התשובה הסופית היא

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n)$$