תרגול 13 - גרם שמידט והעתקה הצמודה

משפט. יהי V ממ"פ ו-W ת"מ של V עם בסיס $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ אז ניתן ליצור מ-B בסיס אורתונורמלי B' על ידי האלגוריתם הבא

$$\begin{aligned}
&w_1=v_1\\
&w_2=v_2-\tfrac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1\\
&w_3=v_3-\tfrac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1-\tfrac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2\\
&\vdots\\
&w_n=v_n-\textstyle\sum_{i=1}^{n-1}\tfrac{\langle v_n,w_i\rangle}{\|w_i\|^2}w_i
\end{aligned}$$

ואז $\{w_1,...,w_n\}$ הוא בסיס אורתוגונלי , לכן $B'=\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|},...,\frac{w_n}{\|w_n\|}\right\}$ אורתונורמלי

תרגיל. הפוך את הקבוצה $\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ לקבוצה אורתונורמלית.

פתרון. ראשית נבחר $w_1=v_1$

$$w_2=v_2-\frac{<v_2,w_1>}{||w_1||^2}w_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
w_3&=v_3-\frac{<v_3,w_1>}{||w_1||^2}w_1-\frac{<v_3,w_2>}{||w_2||^2}w_2\\
&=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{(\frac{1}{2})}{(\frac{6}{4})}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כעת $\{w_1,w_2,w_3\}$ אורתוגונאלית (בדקו!). ננרמל את הוקטורים
$||w_1||=\sqrt{2}\ \ ||w_2||=\frac{\sqrt{6}}{2}\ \ ||w_3||=\frac{\sqrt{12}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

כעת

$$\left\{ \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}}, \frac{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}, \frac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \right\}$$

קבוצה אורתונורמלית.

הגדרה. יהיו V, W ממ"פ מעל $\mathbb{F}\,(=\mathbb{R},\mathbb{C})$ ו-$T : V \to W$ העתקה לינארית אז מגדרים את העתקה הצמודה של $T^* : W \to V$ להיות העתקה המקיימת

$$\forall v \in V, w \in W : \langle T(v), w \rangle_W = \langle v, T^*(w) \rangle_V$$

דוגמה. יהיו $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$ ממ"פ עם המכפלה הסטדנרטית ו-$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ההתעקה לינארית המוגדרת באופן הבא

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

אז אני טוען ש-

$$T^*\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z \\ x+2y-z \end{pmatrix}$$

נראה זאת! יהיו שני ווקטורים $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ו-$w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ אז צריך להראות ש-

$$\langle T(v), w \rangle_W = \langle v, T^*(w) \rangle_V$$

נחשב כל אגף הנפרד ונקבל

$$\begin{aligned} \langle T(v), w \rangle_W &= \\ \left\langle \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 2y_1 \\ 2x_1-y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= \\ (x_1+y_1)\,x_2 + 2y_1y_2 + (2x_1-y_1)\,z_2 \end{aligned}$$

ו-

$$\begin{aligned} \langle v, T^*(w) \rangle_V &= \\ \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2+2z_2 \\ x_2+2y_2-z_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= \\ x_1(x_2+2z_2) + y_1(x_2+2y_2-z_2) \end{aligned}$$

ואכן שני הביטויים שווים!

הערה. תכונות של T^*

1. T^* היא העתקה לינארית.

2. הוכחה $(T_1+T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

$$\begin{aligned}
\langle (T_1+T_2)\,v, w\rangle &= \\
\langle T_1(v) + T_2(v), w\rangle &= \\
\langle T_1(v), w\rangle + \langle T_2(v), w\rangle &= \\
\langle v, T_1^*(w)\rangle + \langle v, T_2^*(w)\rangle &= \\
\langle v, (T_1^*+T_2^*)(w)\rangle &
\end{aligned}$$

3. $T^{*^*} = T$

$$\begin{aligned}
\langle T^*(w), v\rangle &= \\
\overline{\langle v, T^*(w)\rangle} &= \\
\overline{\langle T(v), w\rangle} &= \\
\langle w, T(v)\rangle &
\end{aligned}$$

4. $(ST)^* = T^*S^*$

$$\begin{aligned}
\langle ST(v), w\rangle &= \\
\langle T(v), S^*(w)\rangle &= \\
\langle v, T^*(S^*(w))\rangle &= \\
\langle v, (T^*S^*)(w)\rangle &
\end{aligned}$$

5. אם $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$-ו$B' = \{w_1, \ldots w_m\}$ בסיסים אורתוגונלים ל-V, W אז $[T^*]_B^{B'} = \left([T]_{B'}^B\right)^*$ כאשר כוכבית על מטריצה היא $A^* = \overline{A^t}$