(1) 03.11.13
גליצה פרח
תרגול 4

<u>מרחבי בנך</u>

הגדרה - סדרת איברים $\{x_n\}$ במרחב נורמי נקראת סדרת קושי אם

לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר טבעי N כך ש $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ לכל $m,n \geq N$

או באופן שקול אם $\|x_{P_n} - x_{Q_n}\| \to 0$ לכל שתי סדרות עולות $\{Q_n\}$ ו- $\{P_n\}$

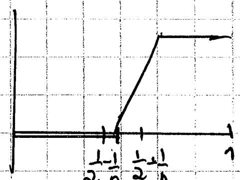
מרחב נורמי שבו כל סדרת קושי מתכנסת לאיבר במרחב-שלם (או מרחב בנך)

ניקח - $X = (C([0,1]), \|\cdot\|_{L_1})$

כלומר X הוא מרחב כל הפונקציות הרציפות עם הנורמה $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

נראה ש X לא שלם.

ניקח סדרה:



הסדרה הזו שואפת לפונקציית מדרגה ופונ' מדרגה לא שייכת ל $C([0,1])$

נבחר את הסדרה
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases},$$

מבחינה גרפית הפונקציות f_n מתקרבות לפונ'
$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ 1 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

נראה ש $\{f_n\}$ היא סדרת קושי.

$$\|f_n - f_m\|_{n>m} = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,dt$$

$$= \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}} |f_n(t) - f_m(t)|\,dt}_{0} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|\,dt}_{|f_n(t) - f_m(t)| \leq^{\text{א.ש.מ}} |f_n(t)| + f_m(t)} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |f_n(t) - f_m(t)|\,dt}_{0}$$

$$\leq 2 \cdot \frac{2}{m} = \frac{4}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

לכן $\{f_n\}$ היא סדרת קושי.

עכשיו נניח בשלילה שקיימת $f \in X$ כך ש $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$

נראה שלכל $c < \frac{1}{2}$, $f(x)=0$, $0 \leq x \leq c$.

נחשב: $\int_0^c |f(t)|\,dt \overset{(*)}{=} \underbrace{\int_0^c |f(t) - f_n(t)|\,dt}_{I}$ כאשר n מס' שלם גדול מספיק שמקיים $c < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

ו- (*) נכון כי $f_n(t)=0$ כאשר $0 \leq t \leq c$

$$I \leq \int_0^1 |f(t) - f_n(t)|\,dt = \|f - f_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

לכן $\int_0^c |f(t)|\,dt = 0$ כיוון שמניחים ש $f \in X$, כלומר רציפה, אז $f(t)=0$ $0 \leq t \leq c$

(2) 03.11.13
אנליזה פונק'
תרגול א

ולכן כיוון שזה נכון לכל $c<\frac{1}{2}$ נקבל ש $f(t)=0$ $0\le t\le \frac{1}{2}$

וכנ"ל אפשר להוכיח ש $f(t)=1$ כאשר $\frac{1}{2}\le t\le 1$ ולכן f לא רציפה.

<u>הגדרה:</u> תהי R משפחת קבוצות לא ריקה. R נקראת חוג אם מתקיים:

1) אם $A,B\in R$ אז $A\cap B\in R$

2) אם $A,B\in R$ אז $A\Delta B\in R$

הערה – מתכונות (1) ו(2) נובע שאם $A,B\in R$ אז גם $A\cup B\in R$, $A\setminus B$
ובאינדוקציה ~~אם~~ אם $A_1,\dots,A_n\in R$ אז $\bigcup_{i=1}^{n}A_i, \bigcap_{i=1}^{n}A_i\in R$

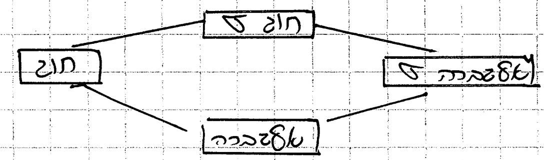
<u>הגדרה:</u> קבוצה E נקראת יחידה של חוג R אם $E\in R$ וגם לכל $A\in R$ $A\subseteq E$

חוג R עם יחידה (~~...~~) נקרא אלגברה.

[ק: יחידה – מכילה את כל הקבוצות בחוג]

<u>הגדרה:</u> חוג קבוצות נקרא חוג σ אם לכל סדרה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ שאיבריה שייכים לחוג $A_n\in R$ מתקיים $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in R$ (סגור תחת איחודים אינסופיים)

<u>הגדרה:</u> חוג σ עם יחידה ייקרא אלגברה σ



<u>דוגמא:</u> ניתן דוגמא לחוג שהוא לא אלגברה

<u>פתרון:</u> דרך לחשוב חוג שלא קיימת בו קבוצה שמכילה את שאר הקבוצות

נחפש קבוצה של קבוצות שלא סגורה לגבי איחודים אינסופיים

ניקח את החוג R של כל תת קבוצות הסופיות של N: $R=\{A\subseteq N \mid |A|<\infty\}$

ברור ש R היא חוג – הפרש סימטרי של 2 קבוצות סופיות ייתן משהו סופי

נוכיח שאין יחידה ב R.
נניח בשלילה שקיים יחידה ב R.
אז לכל $n\in N$, $\{n\}\subseteq E$ ולכן $N=E$, אבל $E\notin R$. קיבלנו סתירה
$\Leftarrow$ E אינסופי

<u>דוגמא:</u> מצאו חוג שהוא לא חוג σ

<u>פתרון</u> – הדוגמא הקודמת

$\Leftarrow$ לכל n, $\{n\}\in R$ אבל $\bigcup_{n\in N}\{n\}=N\notin R$

(3) 03.11.13

אנליזה
תרגול 1

<u>הגדרה:</u> קבוצה A נקראת בת מניה אם קיימת פונ' f חח"ע

$$f: A \to \mathbb{N}$$

חשוב לדעת: אם $\{A_i\}_i$ היא סדרה של קבוצות כך שלכל i, A_i בת מניה,

אז $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ היא גם קבוצה בת מניה

חשוב לדעת - $\mathbb{R}$ היא לא בת מניה.

$\mathbb{N}$ היא בת מניה

$\mathbb{Z}$ בת מניה : $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$