פתרון תרגיל בית 7 – טופולוגיה

שאלה 1

הוכיחו:

א. כל פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי לכל מרחב טופולוגי אחר – הינה רציפה .

ב. כל פונקציה ממרחב טופולוגי כלשהו למרחב הטופולוגי הטריוויאלי - הינה רציפה.

ג. תהי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה. נניח כי $\tau_3\subseteq\tau_2$ וגם $\tau_1\subseteq\tau_4$. הוכיחו כי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_3)$ וגם $f:(X,\tau_4)\to(Y,\tau_2)$ רציפות.

פתרון

א. תהי $f:(X,\tau_{disc})\to(Y,\tau)$ פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי למרחב טופולוגי כלשהו. במ"ט דיסקרטי כל קבוצה היא פתוחה, ולכן $\forall U\subseteq Y$ פתוחה, גם $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה. ומהגדרת הרציפות נובע כי f רציפה.

ב. תהי $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_{trivial})$. נוכיח שהיא רציפה. כזכור, בטופולוגיה הטריוויאלית יש רק שתי קבוצות פתוחות: הקבוצה הריקה והמרחב עצמו. לכן עלינו לבדוק רק שתי תמונות הפוכות.
$f^{-1}(Y)=X$, $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$ ואלה הן שתי קבוצות פתוחות במרחב המקור.
לכן (לפי ההגדרה) f רציפה.

ג. $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה. לכן לכל $U\in\tau_2$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau_1$. אבל, $\tau_3\subseteq\tau_2$, ולכן לכל $U\in\tau_3$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau_1$. מהגדרת הרציפות נובע שֶ- $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_3)$ רציפה.
כמו כן, אם $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה, לכל $U\in\tau_2$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau_4$, היות וְ- $\tau_1\subseteq\tau_4$. לכן $f:(X,\tau_4)\to(Y,\tau_2)$ רציפה גם כן.

מש"ל

שאלה 2

כזכור נאמר שמרחב טופולוגי הוא ממימד אפס אם קיים בסיס לטופולוגיה המורכב מקבוצות סגוחות.

א) הוכיחו כי $B=\{a+5^n\mathbb{Z}:\ \ a\in\mathbb{Z},\ \ n\in\mathbb{N}\}$ בסיס למרחב המטרי $(\mathbb{Z},d_5)$

d_5) המטריקה ה-5-אדית).

ב) הוכיחו כי $(\mathbb{Z},d_5)$ ממימד אפס.

ג) הוכיחו שהישר של סורגנפריי ממימד אפס.

<u>פתרון</u>

א) בדקו שלכל $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $B_{d_5}(a,\frac{1}{5^n})=a+5^{n+1}\mathbb{Z}$. מכאן $B=\left\{a+5^n\mathbb{Z}:\quad a\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{B_{d_5}(a,\frac{1}{5^n}):\quad a\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\}$. ברור שלכל $a\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ $B_{d_5}(a,\frac{1}{5^n})$ קבוצה פתוחה. כמו כן, לכל U פתוחה ולכל $a\in U$, קיים $\varepsilon>0$ כך ש $a\in B_{d_5}(a,\varepsilon)\subseteq U$. אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{5^n}<\varepsilon$. מכאן $a\in B_{d_5}(a,\frac{1}{5^n})\subseteq B_{d_5}(a,\varepsilon)\subseteq U$. כלומר, לכל U פתוחה ולכל $a\in U$ קיימת קבוצה $V\in B$ כך ש $a\in V\subseteq U$. בסך הכל נסיק ש$B=\left\{a+5^n\mathbb{Z}:\quad a\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{B_{d_5}(a,\frac{1}{5^n}):\quad a\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\}$ בסיס ל$(\mathbb{Z},d_5)$.

ב) מ"ל שכל הקבוצות בבסיס הנ"ל הן סגורות. כזכור, $(\mathbb{Z},d_5)$ הוא מרחב אולטרה- מטרי כלומר מרחב שבו מתקיים במקום אי שוויון המשולש תכונה חזקה יותר: $d(x,z)\le\max\{d(x,y),d(y,z)\}$.

נוכיח טענה כללית: במרחב אולטרה-מטרי כל כדור פתוח הוא קבוצה סגוחה.
הוכחה: יהי (X,d) מ"מ. $x\in X,\quad\varepsilon>0$. נוכיח ש $B(x,\varepsilon)$ קבוצה סגוחה.
$B(x,\varepsilon)$ קבוצה פתוחה שכן ראיתם שבכל מ"מ כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.
נוכיח ש $B(x,\varepsilon)$ גם קבוצה סגורה (כמובן בהנחה שמדובר במרחב אולטרה-מטרי).
נניח $\{x_n\}\subseteq B(x,\varepsilon)$ וכן $x_n\to y$ ונראה $y\in B(x,\varepsilon)$.
$x_n\to y$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ $d(x_n,y)<\varepsilon$ ובפרט $d(x_{n_0},y)<\varepsilon$.
$\{x_n\}\subseteq B(x,\varepsilon)$ ולכן $d(x_{n_0},x)<\varepsilon$. מתקיים
$d(x,y)\le\max\{d(x,x_{n_0}),d(x_{n_0},y)\}<\varepsilon$ ומכאן $y\in B(x,\varepsilon)$ והוכחנו שהקבוצה $B(x,\varepsilon)$ גם סגורה ובסה"כ סגוחה.

מכיון ש$(\mathbb{Z},d_5)$ הוא מרחב אולטרה- מטרי נסיק באמצעות הטענה כללית שהוכחנו וכן סעיף א' שהקבוצות בבסיס הנ"ל סגוחות ומכאן $(\mathbb{Z},d_5)$ ממימד אפס.

ג) מההגדרה של הישר של סורגנפריי כל הקבוצות מהצורה $[a,b)$ מהוות בסיס לטופולוגיה (הוכחתם בעבר שאכן איחודים של קבוצות מהצורה הנ"ל יוצרים טופולוגיה). מ"ל שלכל $a<b$ $[a,b)$ סגורה. זה נובע מכך ש $[a,b)^C=(-\infty,a)\cup[b,\infty)=\bigcup_{c<a}[c,a)\cup\bigcup_{b<d}[b,d)$ ולכן $[a,b)^C$ פתוחה ו- $[a,b)$ סגורה.

שאלה 3

יהי X מ"ט. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א) X מרחב T_4.

ב) X מרחב T_1 ולכל קבוצה סגורה $F\subseteq X$, ולכל $U\subseteq X$ פתוחה כך ש $F\subseteq U$ קיימת V פתוחה כך ש $F\subseteq V\subseteq cl(V)\subseteq U$.

פתרון

נוכיח רק א$\Leftarrow$ב.

מההגדרה אם X מרחב T_4 אז הוא בפרט T_1. תהי $F\subseteq X$ סגורה ותהי $U\subseteq X$ פתוחה כך ש $F\subseteq U$. אזי, F,U^C סגורות וזרות ומכיון ש X מרחב T_4 קיימות V,O פתוחות וזרות כך ש $U^C\subseteq O$, $F\subseteq V$. לכן, $O^C\subseteq U$ ובנוסף $V\subseteq O^C$ (כי $V\cap O=\varnothing$). מכאן, $F\subseteq V\subseteq O^C\subseteq U$. O^C סגורה ו- $V\subseteq O^C$ ולכן $V\subseteq cl(V)\subseteq O^C$. בסה"כ נקבל $F\subseteq V\subseteq cl(V)\subseteq U$ כדרוש.

שאלה 4

א) יהי (X,τ) מ"ט סופי. הוכיחו כי (X,τ) הוא מרחב T_1 אם"ם הוא מרחב T_2.

ב) יהיו X,Y מ"ט כך ש Y האוסדורף. אם קיימת $f:X\to Y$ רציפה וחח"ע, אזי X האוסדורף.

ג) הראו שמרחב טופולוגי הוא האוסדורף אם ורק אם לכל $x\in X$ החיתוך של כל הסביבות הסגורות של x הוא הנקודון $\{x\}$.

פתרון

א) T_2 גורר תמיד T_1 לכן מ"ל גרירה בכיוון אחד. נראה שאם X סופי והוא T_1 אז הוא דיסקרטי ובפרט T_2. הסבר: ההפרדה הדרושה היא $\{x\}\cap\{y\}=\varnothing$ או

בדרך אחרת אם המרחב דיסקרטי אז הוא מטריזבילי ובפרט T_2. נוכיח שאכן המרחב דיסקרטי. מ"ל שכל תת קבוצה של X היא סגורה (למה?). המרחב הוא T_1 ולכן כל נקודון סגור ודרך איחודים סופיים ניתן להסיק שכל תת קבוצה סופית היא סגורה. מכיון ש X סופי כל תת קבוצה הינה סופית ולכן סגורה.

ב) יהיו $x_1 \neq x_2 \in X$. f חח"ע ומכאן $f(x_1) \neq f(x_2) \in Y$. Y האוסדורף ולכן קיימות U,V סביבות זרות של $f(x_1), f(x_2)$ בהתאמה. f רציפה ולכן $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ סביבות של x_1, x_2 והן זרות שכן
$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

ג) נניח שהמרחב האוסדורף ונניח בשלילה שקיים $x \in X$, כך שחיתוך כל הסביבות הסגורות של x, מכיל איבר y השונה מ x. לכן $x \neq y$ מתכונת האוסדורף קיימות U,V פתוחות וזרות כך ש $x \in U, y \in V$. כעת $U \cap V = \varnothing$. מכאן $U \subseteq V^C$. נקבל ש V^C סביבה סגורה של x (כי היא מכילה את U שהיא סביבה סגורה של x) ומצד שני $y \notin V^C$. בסתירה לכך ש y שייכת לחיתוך כל הסביבות הסגורות של x.

בכיוון ההפוך: נוכיח האוסדורף. יהיו $x \neq y \in X$. מכיון שלכל $x \in X$ חיתוך כל הסביבות הסגורות של x הוא בדיוק $\{x\}$, נקבל שקיימת סביבה סגורה F של x כך ש $y \notin F$. F^C פתוחה ומתקיים $y \in F$. כעת, F, F^C זרות והן סביבות של x, y בהתאמה ומצאנו את ההפרדה הדרושה.

<u>שאלה 5</u>

נתבונן ב- $\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. נאמר ש- $C \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה אם $C = A \bigcup T$ כאשר: A היא תת קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ <u>בטופולוגיה האוקלידית</u>, ו- T היא תת קבוצה כלשהי של S. הוכחתם שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על $\mathbb{R}$. נסמן את הטופולוגיה הזו ב- τ.

א) הראו ש $O \in \tau$ אם ורק אם $O = B \cap T$ כאשר B תת קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}$ <u>בטופולוגיה האוקלידית</u> ו- $S^C \subseteq T$.

ב) הראו שאם $O\in\tau$ כך ש $S\subseteq O$ אז O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.

ג) הוכיחו שלא קיימות $U,V\in\tau$ זרות כך ש $S\subseteq U, 0\in V$. הסיקו ש $(\mathbb{R},\tau)\notin T_3$.

פתרון

א) $O\in\tau$ אם ורק אם O^C סגורה אם ורק אם $O^C=A\bigcup F$ כאשר: A היא תת קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ בטופולוגיה האוקלידית, ו- F היא תת קבוצה כלשהי של S. זה מתקיים אם ורק אם $O=A^C\cap F^C$ עבור A ו- F כנ"ל. נציב $B:=A^C, T:=F^C$ קל לראות ש B פתוחה באוקלידית ו- $S^C\subseteq T$.

ב) עפ"י א' $O=B\cap T$ כאשר B תת קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}$ בטופולוגיה האוקלידית ו- $S^C\subseteq T$. מהנתון $S\subseteq O$ וכמו כן $O\subseteq T$ ולכן $S\subseteq T$. מכאן, $X=S\cup S^C\subseteq T$ לכן $X=T$ ו- $O=B\cap T=B$. מכאן נקבל הדרוש.

ג) נניח בשלילה שקיימות $U,V\in\tau$ זרות כך ש $S\subseteq U, 0\in V$. עפ"י ב' U פתוחה בטופולוגיה האוקלידית. עפ"י א' $V=B\cap T$ כאשר B פתוחה באוקלידית ו- $S^C\subseteq T$. כעת, $0\in B$ שפתוחה באוקלידית ובטופולוגיה האוקלידית מתקיים $\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$. מכאן נובע, ש $S\cap B\neq\varnothing$ ולכן גם $U\cap B\neq\varnothing$. כעת, $U\cap B\neq\varnothing$ ופתוחה באוקלידית לכן בהכרח $|U\cap B|>\aleph_0$.

מכיוון ש $|S|=\aleph_0$ נסיק ש $U\cap B\cap S^C\neq\varnothing$. מתקיים $\varnothing\neq U\cap B\cap S^C\subseteq U\cap B\cap T=U\cap V$ בסתירה לכך ש U,V זרות.

על מנת להסיק ש $(\mathbb{R},\tau)\notin T_3$ שימו לב ש $S=\varnothing\bigcup S$ סגורה ב $(\mathbb{R},\tau)$.

שאלה 6

א) תהי $f:X\to Y$ פונקציה בין מ"ט ויהי B בסיס ל- Y. הוכיחו ש f רציפה אם ורק אם $f^{-1}(U)$ פתוחה ב X לכל $U\in B$.

ב) יהי X מ"ט, $A \subseteq X$ ו- B בסיס בנקודה $x \in X$. הוכיחו ש $x \in cl(A)$ אם ורק אם לכל $U \in B$ מתקיים $U \bigcap A \neq \varnothing$.

<u>פתרון</u>

א) אם f רציפה אזי מתקיים $f^{-1}(U)$ פתוחה ב X לכל U פתוחה ב Y ובפרט לכל $U \in B$. בכיוון השני נניח ש $f^{-1}(U)$ פתוחה ב X לכל $U \in B$. כעת, תהי O פתוחה ב Y ונראה ש $f^{-1}(O)$ פתוחה ב X. B בסיס ל- Y ולכן קיים $B \supseteq I$ כך ש $O = \bigcup_{U \in I} U$. כעת, $f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup_{U \in I} U\right) = \bigcup_{U \in I} f^{-1}(U)$. כעת, כל אחת מהקבוצות המשתתפות באיחוד $\bigcup_{U \in I} f^{-1}(U)$ היא פתוחה עפ"י ההנחה ולכן גם האיחוד פתוח שכן Y מ"ט ולכן איחוד של פתוחות פתוח. מכאן, f רציפה.

ב) נניח ש $x \in cl(A)$ אזי לכל סביבה U של x מתקיים $U \bigcap A \neq \varnothing$. כעת, B בסיס בנקודה x ומכאן כל $U \in B$ היא סביבה של x. לכן, לכל $U \in B$ מתקיים $U \bigcap A \neq \varnothing$.

בכיוון ההפוך- נניח שלכל $U \in B$ מתקיים $U \bigcap A \neq \varnothing$. על מנת להראות ש$x \in cl(A)$ עלינו להוכיח שלכל סביבה V של x מתקיים $V \bigcap A \neq \varnothing$.

תהי V סביבה של x. מהגדרת בסיס מקומי נקבל שקיימת $U \in B$ כך ש $x \in U \subseteq V$. מההנחה נקבל ש $U \bigcap A \neq \varnothing$. נקבל ש $\varnothing \neq U \bigcap A \subseteq V \bigcap A$ כדרוש.