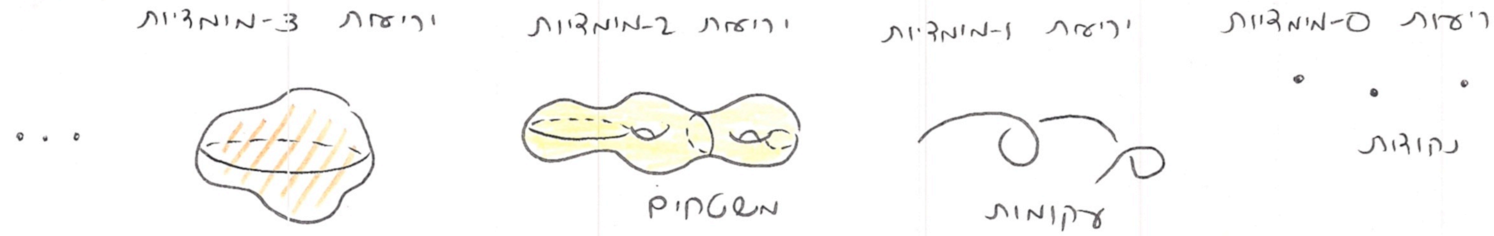
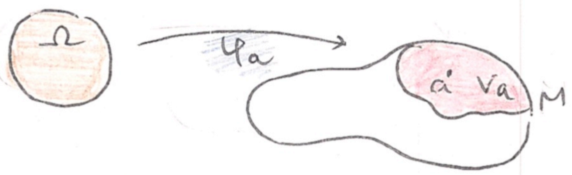
יריעות

יריעה k-מימדית הינה צורה k-מימדית שניתן לעשות עליה חדו"א.
מה שמבטיח זאת היא העובדה שבאופן מקומי היריעה נראית כמו $\mathbb{R}^k$.





יריעה k-מימדית - הגדרה

$M\subset\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית אם לכל $a\in M$

קיימת סביבה V_a של a ב-M ה"דומה" לתת קבוצה פתוחה Ω ב-$\mathbb{R}^k$

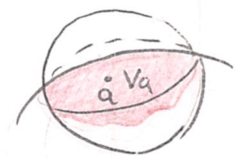
קיימת העתקה $\varphi_a:\Omega\longrightarrow V_a$ חח"ע ועל

$(t_1,\dots,t_k)\longrightarrow(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$

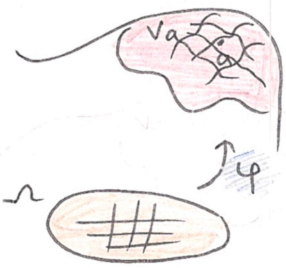
ורגולרית $\text{rank}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_j}\right)=k$ (דרגת המטריצה מקסימלית)

סביבה פתוחה ב-M מתקבלת ע"י חיתוך M עם כדור שמרכזו ב-a

$V_a=M\cap B_a$

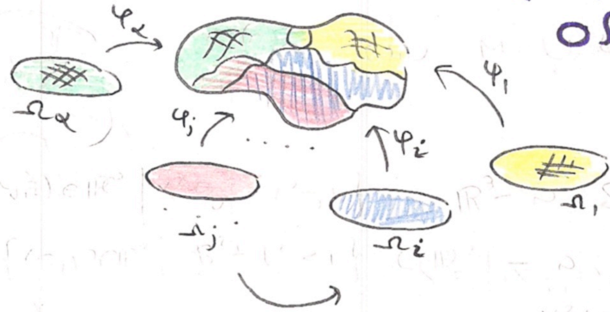


(כך ש-φ "הורסת" את המבנה הדיפרנציאלי של Ω ומושכת אותו ל-M)



הזוג (Ω,φ) נקרא **מפה** של היריעה M בסביבה V_a
$t_1,\dots,t_k$ קואורדינטות של היריעה בסביבה הזאת.

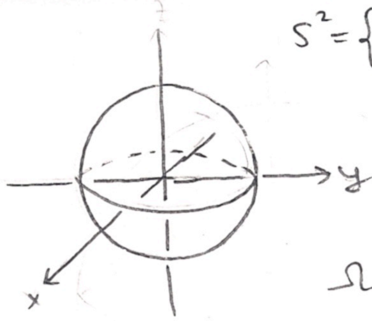
אוסף מפות $(\Omega_\alpha,\varphi_\alpha)$ המכסה את היריעה M ($M=\bigcup_\alpha\varphi_\alpha(\Omega_\alpha)$)
נקרא **אטלס**



העתקה: $\varphi_i^{-1}\circ\varphi_j:\Omega_j\to\Omega_i$ נקראות **העתקת מעבר**

דוגמא - ספירת היחידה ב $\mathbb{R}^3$

$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$



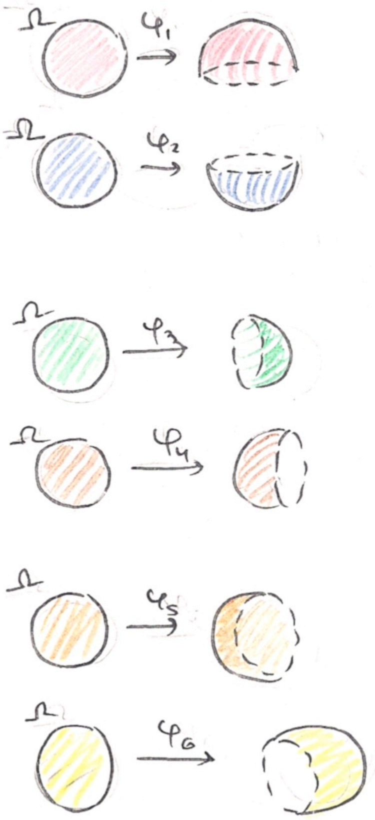
משפט הפונקציה הסתומה מבטיח שבכל נקודה ניתן להציג את המשטח כגרף של פונקציה

$x^2+y^2+z^2=1$

$\downarrow$

$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

ק"פ ב- $\Omega=\{(t,s)\in\mathbb{R}^2 \mid t^2+s^2<1\}\subset\mathbb{R}^2$



$\varphi_1:\Omega\longrightarrow S^2$

$(t,s)\longrightarrow(t,s,\sqrt{1-t^2-s^2})$

$\varphi_2:\Omega\longrightarrow S^2$

$(t,s)\longrightarrow(t,s,-\sqrt{1-t^2-s^2})$

לא מכסה את הנק' שעל קו המשווה

$\downarrow$

צריך עוד מפות:

$y=\pm\sqrt{1-x^2-z^2}$

$\varphi_3:\Omega\longrightarrow S^2$

$(t,s)\longrightarrow(t,\sqrt{1-t^2-s^2},s)$

$\varphi_4:\Omega\longrightarrow S^2$

$(t,s)\longrightarrow(t,-\sqrt{1-t^2-s^2},s)$

לא מכסה את 2 הנק' $(\pm1,0,0)$

$\downarrow$

צריך עוד מפות:

$x=\pm\sqrt{1-y^2-z^2}$

$\varphi_5:\Omega\longrightarrow S^2$

$(t,s)\longrightarrow(\sqrt{1-t^2-s^2},t,s)$

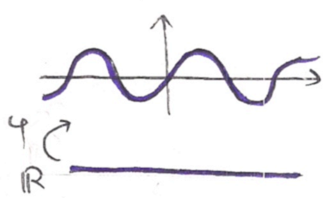
$\varphi_6:\Omega\longrightarrow S^2$

$(t,s)\longrightarrow(-\sqrt{1-t^2-s^2},t,s)$

האטלס הוא בסה"כ 6 מפות (Ω,φ_i)

② כל גרף הוא יריעה: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\to\sin x$ $\rightsquigarrow$ הגרף $\Gamma=(x,\sin x)$ הוא יריעה 1-מימדית

מספיקה מפה אחת באטלס



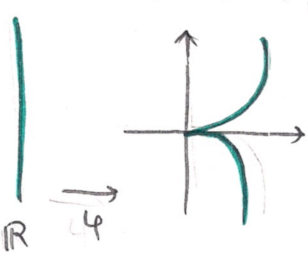
$\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\Gamma$

$t\longrightarrow(t,\sin t)$

③ דוגמא לעקומה שאינה יריעה:

נתונה ע"י $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$t\longrightarrow(t^2,t^3)$



לכן אינו יריעה מפני שב- $t=0$ המפה אינה רגולרית, כדרוש:

$\nabla\varphi=(2t,3t^2)$

$\nabla\varphi(0)=(0,0)$ $\leftarrow$ $\text{rank}(\nabla\varphi(0))=0\neq1$ אינו בדרגה מקסימלית.

כאשר קבוצה $M\subset\mathbb{R}^n$ מוגדרת בצורה סתומה (כפתרון של מערכת משוואות)
יש תנאי קל לחישוב בכדי לקבוע אם היא יריעה או לא:

$M=\{(x_1,\dots x_n)\in\mathbb{R}^n \mid g(x_1,\dots,x_n)=0\}$ היא יריעה ממימד $n-1$ (HyperSurface)

אם $\nabla g(p)\neq 0$ בכל נק' $p\in M$.

באופן כללי יותר:

$$M=\left\{(x_1,\dots x_n)\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{matrix} g_1(x_1,\dots x_n)=0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\dots x_n)=0\end{matrix}\right\}$$ היא יריעה ממימד $n-k$

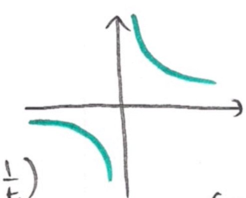
אם $\mathrm{rank}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(p)\right)=m$ (דרגה מקסימלית) בכל נק' p.

דוגמאות:

① $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=xy-1=0\}$

נחשב: $\nabla g=(y,x)$

$\nabla g\neq 0$ בכל נקודה ב-M כי $(0,0)\notin M$



היפרבולה - זו יריעה כי ניתן להגדיר אטלס ע"י שתי מפות

$f_1:(0,\infty)\to\mathbb{R}^2$, $t\to(t,\frac{1}{t})$

$f_2:(0,\infty)\to\mathbb{R}^2$, $t\to(-t,-\frac{1}{t})$

② $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=xy=0\}$

נחשב $\nabla g=(y,x)$

$(0,0)\in M$ ולכן $\nabla g=0$ עבור נק' ב-M

$\Downarrow$

M אינה יריעה 1-מימדית

שני ישרים נחתכים - בנק' החיתוך אין סביבה הדומה ל-$\mathbb{R}$.

$+$

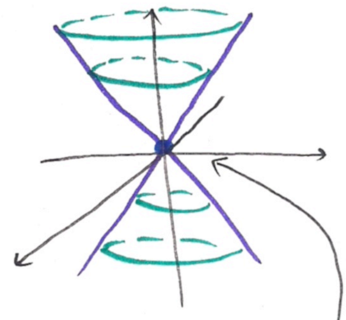
וכן לא יכולה להיות יריעה.

(3) $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=z^2-x^2-y^2=0\}$

נחשב
$$\nabla g=(-2x,-2y,2z)$$

$(0,0,0)\in M$ ולכן קיימת נקודה עבורה $\nabla g=0$ $\Leftarrow$ זו לא יריעה 2-מימדית.

כיצד נראה המשטח?



חתכי גובה $z=c$ $\Leftarrow$ $x^2+y^2=c^2$

מעגלים אם $c\neq 0$

נקודה אם $c=0$

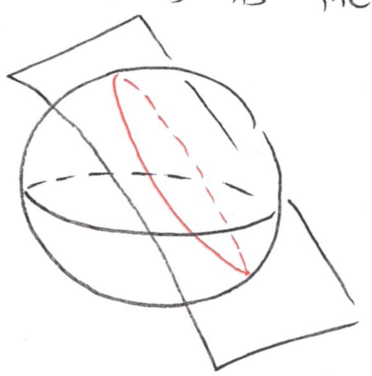
חתך רוחב $y=0$ $\Leftarrow$ $z^2-x^2=0$

שני ישרים

בסביבת $(0,0,0)$ הצורה אינה
דומה ל- $\mathbb{R}^2$.

(4)

איך זה נראה?



$$\Leftarrow\quad M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0 \\ g_2(x,y,z)=x+y+z-1=0 \end{array}\right\}$$

$$\nabla g_1=(2x,2y,2z)$$
$$\nabla g_2=(1,1,1)$$

האם קיימת נקודה כך ש
$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}<2$$

לא ייתכן כי $\operatorname{rank}=0$ כי $(1,1,1)\neq 0$

אבל יכול להיות שהווקטורים תלויים לינארית. זה יקרה אם $x=y=z$

האם יש נקודה כזו על M?

$$\left.\begin{array}{l} g_1 \rightarrow 3x^2=1 \\ g_2 \rightarrow 3x=1 \end{array}\right\}$$

אין פתרון למערכת $\Leftarrow$ ולכן אין נקודה על M
עבורה $\operatorname{rank}=1$

$\Downarrow$

זו יריעה 1-מימדית
$\|$
(מס' משוואות $-$ 3)