הבוחן יתקיים ב04.06, יום שישי, בשעה $10:00$, בזום.
החומר: זה עד הרצאה 8, כולל. מבחינת נושאים: עד בסיסים, כולל.(לפי הנושאים של ההרצאה).
לא יהיו שאלות מהש"ב- אבל השאלות יהיו בסגנון, ייתכן דברים דומים מאוד.
תזכורת: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. בסיס לτ זאת קבוצה B של קבוצות פתוחות, כך שכל קבוצה פתוחה בטופולוגיה היא איחוד של קבוצות מB.
מרחב מקיים את תכונת המניה השניה, ומסמנים בB_2, אם יש לו בסיס בן מניה.
בתרגול הקודם ראינו שB_2 גורר ספרביליות. וההפך לא נכון.
בהרצאה ראיתם שבמרחבים מטריים B_2 שקול לספרבליות.
תרגיל: הוכיחו שB_2 היא תכונה תורשתית, כלומר אם מרחב הוא B_2 אז גם כל תת מרחב שלו הוא B_2.
הוכחה: יהי X מרחב B_2 וY תת מרחב. אז לX יש בסיס בן מניה $B=\{O_n\}$. מתבקש לקחת את החיתוכים של O_n עם Y, ולהוכיח שזה יוצר בסיס עבור Y.
כלומר, אנחנו טוענים שהקבוצה $B_Y=\{O_n\cap Y\}_{O_n\in B}$ היא בסיס לטופולוגיה על Y.
תהי O קבוצה פתוחה בY. כלומר, $O=Y\cap U$ עבור איזשהי קבוצה U פתוחה בX.
מהגדרת בסיס על X, $U=\bigcup O_m$ כאשר לכל m $O_m\in B$.

$$O=Y\cap\left(\bigcup O_m\right)=\bigcup(Y\cap O_m)$$

קיבלנו שכל קבוצה פתוחה בY היא איחוד של קבוצות מB_Y, לכן B_Y מהווה בסיס בן מניה.
שאלה: האם ספרביליות היא תכונה תורשתית?
תזכורת: מרחב נקרא ספריבלי אם יש לו תת קבוצה צפופה בת מניה.
תשובה: לא. ההוכחה ה"נאיבית" לא תעבוד כאן.
כלומר, אם X הוא ספריבילי אז יש לו תת קבוצה צפופה בת מניה, A. היינו מצפים לקחת את $A\cap Y$, ושזאת תהיה תת קבוצה צפופה בY. אבל $A\cap Y$ לא בהכרח צפופה בY! החיתוך יכול להיות ריק אפילו.
דוגמא נגדית: נקח את חצי המישור העליון להיות הקבוצה שלנו. $\{(x,y):y\geq 0\}$. הקבוצות הפתוחות יהיו כל מה שנוצר ע"י: כדורים פתוחים שמוכלים ממש בחצי המישור העליון+ כדורים פתוחים ש"משיקים" לציר הx, כולל נקודת ההשקה.
המרחב ספרבילי, כי אפשר לקחת את $\mathbb{Q}^2\cap\{(x,y):y\geq 0\}$.
בתור תת מרחב נקח את ציר הx. טופולוגיית תת המרחב על ציר הx היא הטופולוגיה הדיסקרטית. כי לכל נקודון בציר הx אפשר למצוא כדור שהנקודה הזאת היא נקודת ההשקה שלו, ולכן הנקודון הזה פתוח (כחיתוך של ציר הx עם קבוצה פתוחה מהמרחב הגדול).
קיבלנו שציר הx הוא מרחב דיסקרטי לא בן מניה, ובפרט לא ספרבילי (במרחב דיסקרטי כל קבוצה היא סגורה, לכן כל קבוצה היא הסגור של עצמה, אז הקבוצה הצפופה היחידה היא המרחב כולו. ולכן המרחב יכול להיות ספרבילי רק אם הוא בן מניה).
תרגיל: הוכיחו שl_∞ (מרחב הסדרות הממשיות החסומות, עם מטריקת הסופרימום- הנורמה של סדרה היא הסופרימום שלה בערך מוחלט) אינו B_2.
פתרון: אנחנו יודעים שB_2 תורשתית. אז מספיק למצוא תת מרחב שאינו B_2. מספיק למצוא תת מרחב דיסקרטי לא בן מניה (כי לפני שניה הערנו שמרחב כזה הוא לא ספרבילי, וB_2 גורר ספרביליות).
נקח את הסדרות שמורכבות מ0 ו1. כלומר $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. יש $2^{\aleph_0}=\aleph$ כאלה. המרחק בין כל שתי נקודות שונות הוא בדיוק 1. לכן זה מרחב דיסקרטי.
תרגיל: הוכיחו שl_1 (מרחב הסדרות עם טור מתכנס בהחלט. $\{(x_n):\sum|x_n|<\infty\}$הוא B_2.

פתרון: l_1 הוא מרחב מטרי, ולכן B_2 שקול לספרביליות. מספיק למצוא תת קבוצה צפופה בת מניה.

נוכיח שסדרות רציונליות מתאפסות לבסוף היא קבוצה צפופה. זאת קבוצה בת מניה כאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה, כאשר הקבוצות הן- כל הסדרות הרצנליות שמתאפסות מהרכיב הn)

צריך להוכיח שהקבוצה נחתכת עם כל כדור פתוח. כלומר, עם כל כדור מהצורה $B((x_n), r)$. שקול להגיד שלכל (x_n) ולכל r יש סדרה רציונלית מתאפסת לבסוף שהמרחק קטן מr. ובכן, ידוע ש$\sum |x_n| < \infty$. לכן יש זנב שקטן מ$\frac{r}{2}$. כלומר, $\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n| < \frac{r}{2}$. כעת נבחר רציונלי q_i שמקיים $|q_i - x_i| < \frac{r}{2N}$ לכל $i \in \{1, ..., N\}$. אז הסדרה $(q_1, ..., q_n, 0, 0, ...)$ היא סדרה רציונלית מתאפסת לבסוף, אשר המרחק שלה מהסדרה (x_n) קטן מr.

$$d((x_n), (q_1, ..., q_N, 0, 0, ...)) = |x_1 - q_1| + ... + |x_N - q_N| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n| < r$$

הגדרה: יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. בסיס מקומי של איבר $x \in X$ זה אוסף B של סביבות של x (קבוצות פתוחות שמכילות את x), ככה שכל קבוצה פתוחה שמכילה את x, מכילה איזשהי קבוצה מB.

למשל: בטופולוגיה הדיסקרטית, אפשר לקחת לכל איבר את הנקודון שלו. זה בסיס מקומי של x.

בטופולוגיה של סורגנפריי, לכל x אפשר לקחת $[x, x + \frac{1}{n})$.

מרחב נקרא בעל תכונת מניה ראשונה, או B_1, אם לכל איבר יש בסיס מקומי בן מניה.

תרגיל: ניזכר כי במרחב האוסדורף, לכל סדרה יש גבול יחיד.

ראינו שההפך לא נכון. הבאנו דוגמא למרחב שבו לכל סדרה יש גבול יחיד, אבל הוא לא האוסדורף.

הוכיחו שמרחב B_1 שבו לכל סדרה יש גבול יחיד, הוא בהכרח האוסדורף.

פתרון: יהי X מרחב B_1 . נניח שהוא לא האוסדורף ונמצא סדרה עם 2 גבולות. לא האוסדורף $\Longleftarrow$ קיימות נקודות $x \neq y$, שכל סביבה של x נחתכת עם כל סביבה של y.

יהי $B_x = \{U_n\}$ בסיס מקומי של x, ו$B_y = \{V_n\}$. נבנה סדרה באופן הבא:

$$a_1 \in U_1 \cap V_1$$

$$a_2 \in (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2)$$

וכו'

תמיד אפשר למצוא איבר כי הנחנו שכל סביבה של x נחתכת עם כל סביבה של y.

הסדרה a_n מתכנסת לx, כי כל סביבה של x מכילה איזשהי קבוצה מהבסיס המקומי, נניח U_n. לפי איך שבנינו את הסדרה, לכל $m \geq n$, $a_m \in U_n$.

מאותה סיבה בדיוק $a_n \to y$

סתירה.

הומיאומורפיזמים

הגדרה: $f : X \to Y$ נקראת "הומיאומורפיזם" אם היא חח"ע ועל ורציפה וf^{-1} רציפה.

שימו לב שזה שהיא חח"ע ועל ורציפה לבד לא מספיק. למשל אם נגדיר את פונקציית הזהות מטופולוגיה דיסקרטית לטופולוגיה טריוויאלית.

מרחבים נקראים הומיאומורפיים אם יש בינהם הומיאומורפיזם.

בעיקרון למרחבים הומיאומורפים יש את אותם תכונות טופולוגיות.

בשביל להוכיח שמרחבים הומיאומורפיים צריך למצוא את הפונקציה המפורשת, בשביל להפריד צריך למצוא תכונה שמתקיימת באחד ולא בשני.

תרגיל: הוכיחו שאם X וY הומיאומורפיים אז אחד מהם הוא T_2 אמ"ם השני הוא T_2.

הוכחה: מספיק להוכיח שאם X הוא T_2 אז גם Y, כי זה סימטרי.

אז יהיו $y_1 \neq y_2 \in Y$. יש פונקציה חח"ע ועל ורציפה $f : Y \to X$. אז $f(y_1) \neq f(y_2)$. $f(y_1) \in U, f(y_2) \in V$, $U \cap V = \emptyset$. $y_1 \in f^{-1}(U), y_2 \in f^{-1}(V)$, קבוצות פתוחות כתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה תחת פונקציה רציפה. והן זרות. מש"ל.

שימו לב שאם $f : X \to Y$ הוא הומיאומורפיזם, אז $f : X \setminus A \to Y \setminus f[A]$ גם הומיאומורפיזם.

לכן אם יש למשל במרחב אחד נקודה שאם נוריד אותה אז המרחב כבר לא קשיר, ובשני אין נקודה כזאת, אז המרחבים לא הומיאומורפיים.

תרגיל: הוכיחו שמעגל לא הומי' לשני מעגלים משיקים.

פתרון: בשני מעגלים משיקים קיימת נקודה שאם נוריד אותה נקבל מרחב לא קשיר- להלן, נקודת ההשקה. אבל במעגל לא משנה איזה נקודה נוריד, המרחב עדיין קשיר. סתירה.

תרגיל: הוכיחו שמעגל לא הומיאומורפי לשני מעגלים שנחתכים בשתי נקודות.

פתרון: במרחב של שני מעגלים נחתכים, אם נוריד נקודה מכל מעגל, לא נקודות החיתוך(!) המרחב עדיין יהיה קשיר. אבל במרחב של מעגל, כל שתי נקודות שנוריד יתנו לנו מרחב לא קשיר.