**תיאורטי 1-פתרון**

**1.** לגבי כל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו ע"י הוכחה או דוגמא נגדית:

א. אם הקבוצה  היא קבוצה פורשת של  אז כל איבריה שונים מ- .

**לא נכון.**

דוגמא נגדית: . 

ב. אם הקבוצה  היא קבוצה פורשת של  אז בהכרח  היא קבוצה פורשת של .

**לא נכון.**

דוגמא נגדית: יהי .  , .

 , .

ג. אם הקבוצה  היא קבוצה פורשת של  אז בהכרח  היא קבוצה פורשת של .

**נכון.**

מכיוון שהקבוצה  היא קבוצה פורשת של  אז כל איבר ב-  ניתן להציג כצירוף ליניארי של איברי : .

נבדוק האם  פורשת את : יהי  נבדוק אם הוא צירוף ליניארי של איברי , כלומר נבדוק אם קיימים  כך ש

 כלומר .

השוויון מתקיים אם ורק אם  . נדרוש 

כלומר  .

בסיכום, ראינו שלכל  קיימים  כך ש  ולכן  קבוצה פורשת של .

2. יהיו  תתי מרחבים של מרחב וקטורי 

א. הוכיחו שאם  אז .

ב. נתון ש- ,  ו- . מצאו את המימדים האפשריים של .

יהיו  תתי מרחבים של מרחב וקטורי 

א. הוכיחו שאם  אז .

הוכחה: מתקיים 

*הסברים:*

*(\*):  ולכן  ומכאן ש .*

*(\*\*) משפט המימדים*

*(\*\*\*): נתון *

קיבלנו ש  ולכן  ומכאן ש .

ב. נתון ש-,  ו- . מצאו את המימדים האפשריים של . מכיוון ש-  תת מרחב של , .

מכיוון ש- תת מרחב של , .

מסקנה: .



המימדים האפשריים של  הם .

**3.** א. תנו דוגמא לשני תתי מרחבים  ו-  של  כך שאיחוד בסיסיהם הוא קבוצה פורשת של  ומתקיים . האם בהכרח  ? נמקו.

ב. תנו דוגמא לשני תתי מרחבים  ו-  של  כך שאיחוד בסיסיהם הוא קבוצה פורשת של  ומתקיים . האם בהכרח  ? נמקו.

1. תנו דוגמא לשני תתי מרחבים  ו-  של  כך שאיחוד בסיסיהם הוא קבוצה פורשת של  ומתקיים . האם בהכרח  ? נמקו.

דוגמא:  

קל לראות ש:  ושאיחוד בסיסיהם של W ו-U הוא קבוצה פורשת של 

בנוסף לכך בכל מקרה בו התנאים האלה מתקיימים אפשר להוכיח ש: 

אחרת (שלילה):

 ולכן: 

אבל : 

יוצא מכאן:  סתירה.

ב. תנו דוגמא לשני תתי מרחבים  ו-  של  כך שאיחוד בסיסיהם הוא קבוצה פורשת של  ומתקיים . האם בהכרח  ? נמקו.

דוגמא:  

קל לראות ש:  ושאיחוד בסיסיהם של W ו-U הוא קבוצה פורשת של 

בנוסף לכך בכל מקרה בו התנאים האלה מתקיימים אפשר להוכיח ש: 

כי איחוד בסיסיהם הוא קבוצה פורשת של  לכן : 

אבל 

לכן 



4. הוכח או הפרך. אם V מרחב וקטורי מעל שדה F, U ו-W תתי מרחבים של V, כך שמתקיים , אזי 





5. הוכח או הפרך. אם V מרחב וקטורי מעל שדה F, קיימים תתי מרחבים U,W של V כך ש - .



**6.** נתונים הוקטורים:



א**.**מצאו בסיס של  והשלימו לבסיס של .

ב**.**מצאו בסיס של  והשלימו לבסיס של .

ג.מצאו בסיס של  והשלימו לבסיס של .

ד**.**מצאו בסיס של  והשלימו לבסיס של .

**א.מצאו בסיס של  והשלימו לבסיס של **:





קבוצת שני הוקטורים באגף ימין היא בסיס **ל- **.

הסבר: **הקבוצה** **היא פורשת** כי פעולות אלמנטריות (פעולות גאוס) על קבוצת וקטורים לא גורמות לשינויי המרחב הנפרש.

**היא בת"ל כי**  הוקטורים בקבוצה יכולים לשמש כחלק מהעמודות של מטריצה משולשית עם אלכסון ללא אפסים.

השלמה לבסיס של : 

**ב.מצאו בסיס של  והשלימו לבסיס של .**





קבוצת שני הוקטורים באגף ימין היא בסיס **ל- **.

הסבר: **הקבוצה** **היא פורשת** כי פעולות אלמנטריות (פעולות גאוס) על קבוצת וקטורים לא גורמות לשינויי המרחב הנפרש.

**היא בת"ל כי**  הוקטורים בקבוצה יכולים לשמש כחלק מהעמודות של מטריצה משולשית עם אלכסון ללא אפסים.

השלמה לבסיס של : 

**ג.מצאו בסיס של  והשלימו לבסיס של **





לכן: 

**ד.מצאו בסיס של  והשלימו לבסיס של **

נחפש תנאי לכך שוקטור  יהיה שייך ל- :

 אם ורק אם  וגם 

 .

נפתור את המערכת הבאה:



נרשום את המערכת בעזרת מטריצה: ונפתור:



נקבל 

לכן אם  אז  כלומר



למרחב הוקטורי  אין בסיס.

השלמה לבסיס של  אפשר לעשות למשל ע"י ארבעת האיברים של הבסיס הסטנדרטי של .

בקרה: נבדוק שהתוצאות שקיבלנו מתאימות למשפט המימדים  :

קיבלנו . ✓

הערה**:** למעשה יכולנו להיעזר במשפט המימדים כדי לחסוך את החישובים בסעיף ד' ולהסיק בעזרתו כי  ולכן .

**דרך פתרון אלטרנטיבית לסעיף ד'** (קשה יותר להבנה ולביצוע)

*  אם ורק אם הוא צירוף לינארי של  . זה מתקיים אם ורק אם כשנבצע פעולות גאוס על המטריצה  ללא החלפת סדר שורות של שורה 3 עם שורה אחרת, במטרה להגיע לצורה מדורגת---- במטריצת המדרגות שנקבל, השורה השלישית תהייה שורת אפסים.

לכן  אם ורק אם .

*  אם ורק אם הוא צירוף לינארי של  . זה מתקיים אם ורק אם כשנבצע פעולות גאוס על המטריצה  ללא החלפת סדר שורות של שורה 3 עם שורה אחרת, במטרה להגיע לצורה מדורגת---- במטריצת המדרגות שנקבל, השורה השלישית תהייה שורת אפסים.



לכן  אם ורק אם 

מכאן ש אם ורק אם 

וכמו בדרך הראשונה נקבל כי 