תרגיל 3 בגיאומטריה דיפרנציאלית.

איזומטריות:

1. כמה איזומטרית ישנן ששולח את האילפסואיד $x^2+y^2+2z^2=3$ לאליפסואיד $\frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2)+\frac{2}{3}(xy+xz+yz)=3$ ואת המישור $x=1$ למישור $x-y=\sqrt{2}$:

2. כמה איזומטריה ששולח את ההיפרבולואיד $x^2-y^2-z^2=7$ להיפרבולואיד $4xy+2\sqrt{3}yz+2z^2=3$:

עקומות במישור – טכני:

3. חקרו את העקומה $y=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ (למי שלא מכיר $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$)

4. חשב את העקמומיות של העקומה $y=\sqrt{\cos x}$ (בתחום ההגדרה שלה, שהוא $\cos x>0$)

עקומות במישור – תיאורטי:

5. עקומה $\gamma(s):[0,L]\to\mathbb{R}^2$ (במהירות יחידה) סגורה נמצאת כולה בתוך העיגול $x^2+y^2\le R^2$, הוכיחו שיש נקודה בה $|k(s)|\ge\frac{1}{R}$:

6. תהי פונקציה חלקה $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, נגדיר עקומה $\gamma(s)=\left(\int_0^s\cos(\phi(u))\,du\,,\int_0^s\sin(\phi(u))\,du\right)$:
   א. הוכיחו כלפרמטריזציה הזאת מהירות יחידה, וחשבו עקמומיות:
   ב. מצא עקומה $\gamma(s)$ שהעקמומיות שלה בכל נקודה היא $k(s)=s$.

עקומות במרחב – טכני:

7. א. מצא פרמ' מהירות יחידה לעקומה $\gamma(t)=(a\cos t\,,a\sin t\,,bt)$ (סליל)
   ב. הוכח שהיא מקיימת $\langle\tilde{\gamma}'(s),u\rangle=c$ עבור וקטור u וסקאלר c קבועים כלשהם.

עקומות במרחב – תיאורטי:

8. הוכיחו שאם לעקומה $\gamma(s)$ עקמומיות שאינה מתאפסת $k(s)\neq0$, ופיתול שכן מתאפס $\tau(s)=0$, אז
9. תהי עקומה $\gamma(s)$ במרחב אם עקמומיות $k(s)\neq0$ ופיתול $\tau(s)$, נסמן $\gamma_T(s)=T(\gamma(s))$ עבור איזושהי איזומטריה T, מה ניתן לומר על העקמומיות והפיתול של $\gamma_T(s)$?