

89113- אלגברה ליניארית 2

תרגיל בית 1- דטרמיננטות

להגשה למתרגלת/ת שבקבוצה שלו אתם **רשומים**.

בכל השאלות יש לפרט דרך מלאה. תשובות סופיות בלבד לא יזכו בנקודות.

שאלה 1

נתונות המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטות של A ו B .

שאלה 2

בכל סעיף נתונות שתי מטריצות A, B . עליכם לבטא את $\det A$ כפונקציה של $\det B$ וזאת מבלי לחשב אף אחת מהדטרמיננטות.

$$א. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$ב. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ג. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

שאלה 3

מצאו את ערך הדטרמיננטה $\begin{vmatrix} x-2 & x-3 & x-4 \\ x+1 & x-1 & x-3 \\ x-4 & x-7 & x-10 \end{vmatrix}$. ניקוד חלקי בלבד יינתן לחישוב ארוך מהדרוש.

שאלה 4

מטריצת 'ונדרמונדה' היא מטריצה מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה של מטריצה כזו. רמז: מטריצת 'ונדרמונדה' היא מטריצה מהצורה

כדאי להתחיל במקרה $n = 3$. מצאו תנאי פשוט לכך ש $\det A \neq 0$.

שאלה 5

נתונה מטריצה A מסדר כלשהו, ואיבריה הם המספרים $0, 1$ בלבד (כמובן שכל מספר יכול להופיע יותר מפעם אחת). האם נכון ש $\det A \in \{0, 1, -1\}$?

שאלה 6

הגדרה: מטריצה 'מעניינת' היא מטריצה 3×3 כך שאיבריה הם המספרים $1, 2, 3, \dots, 9$ וכל מספר מופיע פעם אחת בלבד במטריצה.

מצאו מטריצה מעניינת שהיא בעלת דטרמיננטה מקסימלית. נמקו את תשובתכם וחשבו דטרמיננטה זו.

רמז 1: יש יותר מאפשרות אחת. (למה?)

רמז 2: הביטוי

$$9 \cdot 6 \cdot 1 + 8 \cdot 5 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \cdot 3$$

הוא המינימלי מכל הביטויים מהצורה

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 + \sigma_7 \sigma_8 \sigma_9$$

כאשר σ היא תמורה כלשהי על המספרים $1, 2, 3, \dots, 9$.

שאלה 7

נתונים חמישה מספרים בני חמש ספרות, כולם מתחלקים ב-17:

52292 47277 36601 21029 12342

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

וכן נתונה המטריצה הבאה:

הוכיחו כי $\det A$ מתחלק ב-17