<u>בוחן – מד"ר – 88-240 – 15.12.22</u>

משך הבחינה: שעה וחצי   מרצה: דר' ארז שיינר   מתרגל: מר' עומר רוסלר   חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 2$.

2. מצאו פתרון למד"ר $y' = \frac{y^2+e^x}{-2xy}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = -1$.

3. כדורגל בעל מסה של $m = 1kg$ נבעט כלפי מעלה במהירות התחלתית של v_0.

   הניחו כי כוח המשיכה הוא קבוע ושווה לmg, כאשר g קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ.

   מצאו את v_0 אם נתון שהכדור הגיע חזרה לנקודה ממנה הוא נבעט לאחר שתי שניות, במקרים הבאים:

   א. בהנחה שאין כוחות נוספים פרט לכוח המשיכה.

   ב. בהנחה שכוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לגודל המהירות של הכדור.

<u>נוסחאון מד"ר</u>

<u>חלק א' – מד"ר מסדר ראשון:</u>

<u>כתיב דיפרנציאלי</u> – את המד"ר $y' = f(x,y)$ נוכל לכתוב באופן שקול $dy = f(x,y)dx$

<u>מד"ר פרידה</u> – פתרון למד"ר מהצורה $f(x)dx = g(y)dy$ מקיים את המשוואה הסתומה $F(x) = G(y) + C$
כאשר $F(x) = \int f(x)dx$ וכן $G(y) = \int g(y)dy$.

<u>מד"ר הומוגנית</u> – מד"ר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $\int \frac{1}{g(z)-z}dz = \ln|x| + C$. נמצא את z ונציב לקבל $y = xz$.
ניתן להציג את $f(x,y)$ כ$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ אם ורק אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים כי $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$.
במקרה זה $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

<u>מד"ר לינארית מסדר ראשון</u> – פתרון למד"ר $y' + a(x)y = b(x)$ נתון ע"י הנוסחא

$$y = e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}dx\right)$$

כאשר $A(x) = \int a(x)dx$.

<u>משוואת ברנולי</u> – יהי $n \neq 0,1$, מד"ר מהצורה $y' + a(x)y = b(x)y^n$.
נציב $z = y^{1-n}$ ונקבל את המד"ר $z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$.
נמצא את z ונחלץ $y = z^{\frac{1}{1-n}}$.

<u>מד"ר מדוייקת</u> – מד"ר מהצורה $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.
הפתרון של מד"ר מדוייקת מקיים את המשוואה הסתומה $F(x,y) = C$ כאשר $F_x = P, F_y = Q$.
שלבי הפתרון:

1. נבדוק אם היא מדוייקת – המד"ר מדוייקת אם ורק אם $P_y = Q_x$.
2. נמצא את F ע"י חישוב אינטגרל $F = \int Pdx + c(y)$.
3. נגזור ונשווה למקדם השני $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx + c(y)\right) = Q$, וכך נמצא את $c(y)$.
4. הפתרון נתון באופן סתום ע"י $F(x,y) = C$.

גורם אינטגרציה – מד"ר מהצורה $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, נחפש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ שכפל בו יהפוך את המד"ר למדוייקת.

שלבי התהליך:

1. יש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ אם הביטוי $\frac{P_y-Q_x}{Q}$ אינו תלוי בy.
2. במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(x)=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}dx}$.
3. נכפול בגורם האינטגרציה, ונוודא שקיבלנו מד"ר מדוייקת (לא חובה מתמטית, אבל מומלץ מאד).
4. נפתור את המד"ר המדוייקת שקיבלנו.

בעיית קושי למד"ר מסדר ראשון – מציאת פונקציה y המקיימת את המד"ר $y'=f(x,y)$ וכן את תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$

משפט הקיום והיחידות – תהי $f(x,y)$ רציפה ובעלת נגזרת חלקית f_y רציפה בתחום $|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b$.
נסמן בM את החסם של $|f(x,y)|$ בתחום, ונסמן $a'=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$.

אזי **קיים** פתרון **יחיד** y לבעיית הקושי $y'=f(x,y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$ בתחום $|x-x_0|\le a'$.

חלק ב' – נוסחאות פיזיקליות בסיסיות:

משמעות הנגזרות –

1. $y(t)$ מיקום
2. $v(t)=y'(t)$ מהירות
3. $a(t)=y''(t)$ תאוצה

החוק השני של ניוטון - $F=ma$ כאשר F הוא סכום הכוחות, m היא המסה של הגוף, וכן a הוא התאוצה של הגוף

כוח המשיכה של כדור הארץ – עבור גוף "קרוב" לפני כדור הארץ נניח כי כוח המשיכה הוא mg כאשר m היא המסה של הגוף וכן g הוא קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ ($g\approx 9.82\ m/sec^2$).

כוח קפיץ – קפיץ בעל קבוע קפיץ k מפעיל כוח פרופורציונלי למרחק מנקודת הרפיון בכיוון ההפוך.

אם y הוא המיקום ביחס לנקודת הרפיון, אז הקפיץ יפעיל כוח של $-ky$.