תרגיל 9 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. יהי E שדה פיצול של $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ כך ש $[E:\mathbb{Q}]$ אי זוגי. הוכיחו כי כל שורשי $f(x)$ ממשיים. רמז: חשבו על הצמדה מרוכבת.
פתרון: נניח בשלילה כי יש שורש מרוכב. הצמדה מרוכבת היא אוטומורפיזם של E שאינו אוטומורפיזם הזהות (כי יש ב E מספרים מרוכבים). היא כמובן גם מקבעת את $\mathbb{Q}$ ולכן היא איבר בחבורת גלואה $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. הסדר של הצמדה הוא 2 ולכן

$$2|\,\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})|$$

כלומר גודל חבורת גלואה הוא זוגי. אבל $E/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה (E שדה פיצול, וההרחבה ספרבילית כי המאפיין הוא 0) ולכן

$$|\,\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})|=[E:\mathbb{Q}]$$

בסתירה לנתון.

2. נסמן $\rho=e^{\frac{2\pi i}{3}}$. חשבו את

$$[\mathbb{Q}(2\rho+\sqrt[3]{25}):\mathbb{Q}]$$

רמז: העזרו בשאלה 1ב משבוע שעבר
פתרון: בגלל שזה סיפוח של איבר אחד, השאלה היא בעצם מה דרגת הפולינום המינימלי של $2\rho+\sqrt[3]{25}$. כבר ראינו שחבורת גלואה של $\mathbb{Q}(\rho,\sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$ היא S_3. ראינו כבר בתרגול שדרגת הפולינום המינימיל היא המסלול של $2\rho+\sqrt[3]{25}$ תחת הפעולה של חבורת גלואה. השורשים של x^3-5 הם $\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{5}\rho,\sqrt[3]{5}\rho^2$. נסמן את השורשים $1,2,3$. כל התמורות עליהם אפשריות (כי החבורת גלואה היא S_3). נבין מה כל תמורה עושה ל $2\rho+\sqrt[3]{25}$. נזכור כי $\rho=\frac{\sqrt[3]{5}\rho}{\sqrt[3]{5}}$

$\varphi_1=\mathrm{id}$: משאיר $2\rho+\sqrt[3]{25}$.

$\varphi_2=(12)$: מחליף את $\sqrt[3]{5}$ עם $\sqrt[3]{5}\rho$ ולכן שולח את ρ ל $\frac{1}{\rho}=\rho^2=-1-\rho$. לכן
$\varphi_2(2\rho+\sqrt[3]{25})=2\rho^2+\sqrt[3]{25}\rho^2=-2-2\rho-\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{25}\rho$

$\varphi_3=(13)$: שולח את ρ ל ρ^2 ולכן $\varphi_3(2\rho+\sqrt[3]{25})=2\rho^2+\sqrt[3]{25}\rho=-2-2\rho+\sqrt[3]{25}\rho$

$\varphi_4=(23)$: שולח את ρ ל ρ^2 ולכן $\varphi_4(2\rho+\sqrt[3]{25})=2\rho^2+\sqrt[3]{25}=-2-2\rho+\sqrt[3]{25}$

$\varphi_5=(123)$: שולח את ρ ל ρ ולכן $\varphi_5(2\rho+\sqrt[3]{25})=2\rho+\sqrt[3]{25}\rho^2=2\rho-\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{25}\rho$

$\varphi_6=(132)$: שולח את ρ ל ρ ולכן $\varphi_6(2\rho+\sqrt[3]{25})=2\rho+\sqrt[3]{25}\rho$

קיבלנו 6 שורשים שונים (הם אכן שונים כי $1,\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{25},\rho,\sqrt[3]{5}\rho,\sqrt[3]{25}\rho$ הוא בסיס למרחב) ולכן הדרגה של הפולינום המינימלי היא 6.

3. חישבנו בכיתה את חבורת גלואה של $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}},\sqrt{2-\sqrt{5}})/\mathbb{Q}$. שימו לב ש $\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{5}}=i\in\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}},\sqrt{2-\sqrt{5}})$.
חשבו את חבורת גלואה של

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}},\sqrt{2-\sqrt{5}})/\mathbb{Q}(i)$$

רמז: שימו לב שהיא תת חבורה של החבורה שחישבנו בכיתה.
פתרון: חבורת גלואה של $G=\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}},\sqrt{2-\sqrt{5}})/\mathbb{Q}$ היא D_4. כל איבר בחבורת גלואה של $H=\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}},\sqrt{2-\sqrt{5}})/\mathbb{Q}(i)$ הוא גם איבר ב G. מצד שני, כל איבר $\varphi\in G$ שמקיים

$$\varphi(i)=i$$

נמצא ב H. לכן כל מה שצריך להבין זה איזה איברים מ G מקבעים את i. היות ש

$$i=\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{5}}$$

זה די קל לקבוע. יוצא שאלה האוטומורפיזמים שמוגדרים לפי

$$\sqrt{2+\sqrt{5}}\to\sqrt{2+\sqrt{5}},\quad \sqrt{2-\sqrt{5}}\to\sqrt{2-\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{5}}\to-\sqrt{2+\sqrt{5}},\quad \sqrt{2-\sqrt{5}}\to-\sqrt{2-\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{5}}\to\sqrt{2-\sqrt{5}},\quad \sqrt{2-\sqrt{5}}\to\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{5}}\to-\sqrt{2-\sqrt{5}},\quad \sqrt{2-\sqrt{5}}\to-\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

אם נסתכל על הכתיבה כתמורות אלה התמורות $\mathrm{id},(12)(34),(13)(24),(14)(23)$.
תמורות אלה מהוות חבורה שאיזומורפית ל $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. זוהי חבורת גלואה.

4. יהי $f(x)=x^4-10x^2+1$ ו $g(x)=(x^2-2)(x^2-3)$. ראינו כבר בעבר כי לשני פולינומים אלו יש אותו שדה פיצול $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ נסמן $G=\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. כמובן שחבורת גלואה פועלת על השורשים של $f(x),g(x)$. הראו כי הפעולות לא איזומורפיות. (בשפה פשוטה: לא משנה איך ממספרים את השורשים, הפעולות שונות).
רמז: זכרו כי השורשים של $f(x)$ הם $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$.
פתרון: כבר ראינו שחבורת גלואה מכילה 4 תמורות. הן נקבעות לפי הפעולה על $\sqrt{2},\sqrt{3}$ לפי האופציות להלן:

$$\sqrt{2}\to\sqrt{2},\quad \sqrt{3}\to\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}\to-\sqrt{2},\quad \sqrt{3}\to\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}\to\sqrt{2},\quad \sqrt{3}\to-\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}\to-\sqrt{2},\quad \sqrt{3}\to-\sqrt{3}$$

אם מסתכלים על זה כתמורות על השורשים $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ של $g(x)$. אז מתקבלות התמורות

$$\mathrm{id}, (12), (34), (12)(34)$$

אם מסתכלים על זה כתמורות על השורשים $\sqrt{2}+\sqrt{3}, -\sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{2}-\sqrt{3}, -\sqrt{2}-\sqrt{3}$ אז מתקבלות התמורות

$$\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)$$

בשני המקרים החבורה איזומורפית ל $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. אבל בפעולה השניה לכל איבר בחבורה חוץ מ id אין נקודות שבת ובפעולה הראשונה יש ולכן הן לא איזומורפיות.