

תרגיל בית 10 - מתמטיקה בדידה

שאלה 1. יהי X, Y קבוצות לא ריקות. נגדיר את $\mathcal{F}(X, Y)$ להיות קבוצת כל הפונקציות מ- X ל- Y . יהי $a \in X$ איבר נתון. כעת נגדיר:

$$\Phi: \mathcal{F}(X, Y) \rightarrow Y$$

$$\text{על ידי } \Phi(f) = f(a)$$

(1) הראו כי Φ מוגדרת היטב.

(2) האם Φ היא חח"ע? האם היא על?

שאלה 2. עבדו מעל ZFC. יהי A, B קבוצות לא ריקות, נסתכל על הקבוצה הבאה:

$$\text{pf} := \{f: A' \rightarrow B: A' \subseteq A, \text{ חח"ע } f\}$$

(1) הראו כי pf לא ריקה

(2) הוכיחו כי קיימת פונקציה חח"ע מ- A ל- B או קיימת פונקציה מ- A על B . (רמז: הראו כי עבור כל שרשרת

C בקס"ח (pf, \subseteq) , $\bigcup C$ היא פונקציה חח"ע)

שאלה 3. עבור מספר טבעי n , נאמר שפונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ דוחסת אמ"מ לכל $m < n$ מתקיים: $f(m) \leq m$. הוכיחו או הפריכו: קיים k טבעי עבורו f^k פונקציה קבועה. $(f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ פעמים}})$.

שאלה 4. נסתכל על היחס f מ- \mathbb{N} ל- \mathbb{Z} המוגדר באופן הבא:

$$f(n) = \frac{(-1)^n(2n-1)+1}{4}$$

(1) הראו כי f היא פונקציה.

(2) האם f חח"ע? האם היא על?

שאלה 5. יהיו A, B, C, D קבוצות לא ריקות, ונניח כי $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow D$ פונקציות חח"ע. הוכיחו כי היחס h מ- $A \times C$ ל- $B \times D$ המוגדר באופן הבא עבור $(a, c) \in A \times C$:

$$h((a, c)) := (f(a), g(c))$$

הוא פונקציה חח"ע.

שאלה 6. מצאו פונקציה חח"ע מקבוצת הסדרות הבינאריות הסופיות ל- \mathbb{N} .

שאלה 7. נסתכל על:

$$\mathbf{P}_2 := \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) : P \text{ חלוקה בעלת שני איברים}\}$$

מצאו פונקציה חח"ע ועל מ- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ל- \mathbf{P}_2 .

שאלה 8. יהי A, B קבוצות, ו- f פונקציה מ- A ל- B . עבור $A_0, A_1 \subseteq \text{of } A$, $B_0, B_1 \subseteq \text{of } B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

$$f^{-1}[B_0 \cup B_1] = f^{-1}[B_0] \cup f^{-1}[B_1] \quad (1)$$

$$f[A_0 \cup A_1] = f[A_0] \cup f[A_1] \quad (2)$$

$$f^{-1}[B_0 \cap B_1] = f^{-1}[B_0] \cap f^{-1}[B_1] \quad (3)$$