

## תרגילים פתורים על גרין

3 באפריל 2019

1. תהי  $\omega = Pdx + Qdy$  סגור המוגדר על  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . תהיינה  $C_1$  ו  $C_2$  עקומות חלקות ופשוטות וסגורות, מכונות חיובית שעוקפות את  $p$ . הראו ש

$$\int_{C_1} F = \int_{C_2} F$$

**פתרון:** קיים מעגל בעל רדיוס מספיק קטן  $C$  המוכל בשטח המוקף על ידי  $C_1$  ו  $C_2$ . נסמן ב  $D_1$  את התחום התחום על ידי העקומות  $C_1$  ו  $C$  ו ב  $D_2$  את השטח התחום על ידי  $C_2$  ו  $C$ . מכיוון שהתבנית סגורה, מתקיים

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

נשים לב, שמכיוון ש  $C$  נמצאת בתוך השטח התחום על ידי  $C_1$  ו  $C_2$  האוריינטציה החיובית של  $C$  ביחס ל  $D_1$  וביחס ל  $D_2$  היא אותה אוריינטציה. כמו כן, משפט גרין נותן לנו

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{D_1} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D_1} Pdx + Qdy \\ &= \int_C Pdx + Qdy + \int_{C_1} Pdx + Qdy \end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{D_2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D_2} Pdx + Qdy \\ &= \int_C Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy \end{aligned}$$

מהמשוואות נובע ש

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy$$