תרגיל 8 בפונקציות מרוכבות

1. נסמן את רדיוס ההתכנסות ב R. היות ש $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אנחנו יודעים ש $\sum a_n z^n$ מתכנס עבור $z=1$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא לפחות 1. מצד שני רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum |a_n| z^n$ הוא גם R והטור הזה דווקא מתבדר עבור $z=1$ כלומר $R \leq 1$ ולכן לסיכום $R=1$.

2. (א) לפי נוסחת קושי הדמר טריוויאלי לראות שרדיוס ההתכנסות הוא

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$$

כמו כן, עבור נקודות z שבהן $|z|=1$ קל לראות שהטור מתבדר כי הסדרה של הטור לא מתכנסת ל0. לסיכום תחום ההתכנסות הוא

$$\{z \mid |z| < 1\}$$

(ב) הפרינציפ הוא כמובן לשים לב שיש כאן פחות או יותר נגזרת שניה של הטור ההנדסי הרגיל $\sum z^n$. ליתר דיוק, לפי גזירה איבר איבר מקבלים

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n = z\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^{n-1} \\
&= z\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)z^n)' = z\sum_{n=1}^{\infty}(z^{n+1})'' = \\
&= z(\sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1})'' = z(\frac{z^2}{1-z})'' = z(\frac{2z-z^2}{(1-z)^2})' \\
&= -z(1-\frac{1}{(z-1)^2})' = -z(\frac{2}{(z-1)^3}) = \frac{-2z}{(z-1)^3}
\end{aligned}$$

3. $f(z)$ שלמה ולכן יש לה פיתוח לטור טיילור בכל $\mathbb{C}$. שני האיברים הראשונים בטור טיילור הם 0 (כי $f(0)=f'(0)=0$) כלומר

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

אז אם נגדיר

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^2} & z \neq 0 \\ \frac{f^{(2)}(0)}{2} = \frac{1}{2} & z = 0 \end{cases}$$

אז $g(z)$ תהיה גם כן שלמה. נשים לב שלפי הנתון, לכל z כך ש $|z| \geq 10$ מתקיים ש $|g(z)| \leq 1$ כלומר $g(z)$ חסומה ב $\{z \mid |z| \geq 10\}$ אבל בוודאי ש $g(z)$ חסומה גם ב

$\{z \mid |z| \leq 10\}$ (היא רציפה וזה תחום סגור וחסום). ולכן בסה"כ $g(z)$ חסומה. לפי משפט ליוביל $g(z)$ קבועה כלומר

$$g(z) = g(0) = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$f(z) = \frac{1}{2}z^2$$

היא הפונקציה היחידה שמקיימת את הדרישות הנ"ל.