קובץ תרגילים באלגברה לינארית 1

תרגיל 1 באלגברה ליניארית 1 – פתרון וחקירה של מערכות משוואות ליניאריות

1) פתרו את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס-ג'ורדן.

א. $\begin{cases} 3x+4y-2z=-10 \\ 4x+5y=-9 \\ -2x-2y+z=8 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} y+2z-w=-7 \\ x+3y+w=6 \\ 2x-z=3 \\ 2y+z+w=4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+x_2-4x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-x_4=0 \\ -4x_1-3x_2+5x_3-4x_4=0 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} iz_1-iz_3=1 \\ z_2-(1+4i)z_3=1 \\ (2-i)z_1+iz_2+3z_3=-1 \end{cases}$

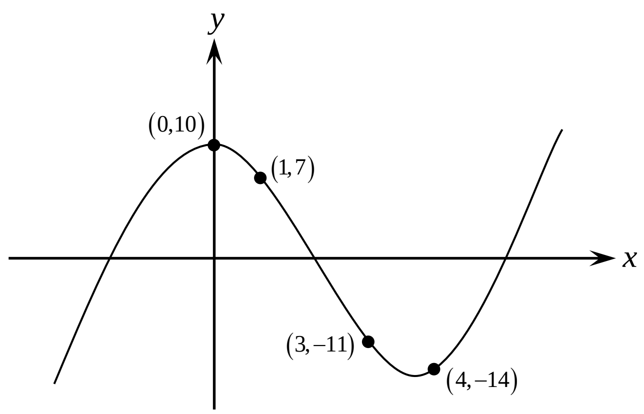
ה. $\begin{cases} -2y+3z=1 \\ 3x+6y-3z=-2 \\ 6x+6y+3z=5 \end{cases}$

ו. $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x+y-z=3 \\ -x+9y-5z=7 \end{cases}$

ז. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=3 \end{cases}$

ח. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=-15 \\ 5x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 3x_1+x_2+3x_3=11 \\ x_1+x_2-4x_3=-30 \end{cases}$

2) בשרטוט הבא מתואר הגרף של הפולינום $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. מצאו את המקדמים a, b, c ו-d על סמך נתוני הגרף.



3) מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלו) למערכות הבאות I. פתרון יחיד
II. אין פתרון
III. אינסוף פתרונות

תארו את הפתרון במקרים I ו-III

א. $\begin{cases} x-3z=-3 \\ 2x+ky-z=-2 \\ x+2y+kz=1 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x-2y+kz=1 \\ 2x-(k+1)y+6z=2 \\ 3x-6y+9z=k \end{cases}$

ג. $\begin{cases} x+ky+z=0 \\ kx+y+kz=0 \\ (k+1)x-y+z=0 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} (k+3)x+y+2z=k \\ kx+(k-1)y+z=2k \\ (3k+3)x+ky+(k+3)z=3 \end{cases}$

4) מצאו לאילו ערכי a ו-b (אם יש כאלו) למערכות הבאות I. פתרון יחיד
II. אין פתרון
III. אינסוף פתרונות

א. $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 3x-y+2z=b \\ x-5y+8z=2-b \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y+b^2z=-a \\ 2x+3y+a^2z=b \end{cases}$

5) האם יש מערכת משוואות ליניארית בשלושה נעלמים אשר קבוצת פתרונותיה היא $\{(a,b,c) \mid a^2=b\}$. נמקו !

***6)** נתונה המערכת

$$(*) \quad \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$$

חשבו את $x+y+z$ **מבלי** לפתור את $(*)$

7) קבעו את כל הצורות המדורגות קנוניות מסדר 2×2 ומסדר 2×3

8) בשאלות הבאות, בחרו את התשובה הנכונה – יש לנמק !

I. למערכת

$$\begin{cases} x+z=2 \\ y+8z=1 \\ x+y+\lambda^2 z=\lambda \end{cases}$$

א. פתרון יחיד עבור ערך יחיד של λ
ב. אינסוף פתרונות עבור אינסוף ערכים של λ
ג. פתרון יחיד עבור אינסוף ערכים של λ
ד. אין פתרון עבור אינסוף ערכים של λ

II. נתונה מערכת מסדר $n\times n$. מה ניתן להגיד על פתרונותיה ?

א. כלום !
ב. למערכת לכל היותר פתרון אחד
ג. למערכת בדיוק פתרון אחד
ד. למערכת לפחות פתרון אחד

III. נתונה מערכת מסדר $m\times n$ כאשר $m<n$. מה ניתן להגיד על פתרונותיה ?

א. כלום !
ב. למערכת יותר מפתרון אחד
ג. אם למערכת יש פתרון, אז יש לה אינסוף פתרונות
ד. למערכת אינסוף פתרונות עם $n-m$ דרגות חופש (כלומר הפתרון יהיה תלוי ב-$n-m$ משתנים חופשיים)

<u>תרגיל 2 באלגברה ליניארית 1 – מטריצות ופעולות על מטריצות</u>

1) נתונות מטריצות D,C,B,A ו-E מהסדרים

$$\underset{4\times 5}{A}\quad \underset{4\times 5}{B}\quad \underset{5\times 2}{C}\quad \underset{4\times 2}{D}\quad \underset{5\times 4}{E}$$

קבעו אילו מהביטויים הבאים מוגדרים. עבור אילו שמוגדרים, קבעו את הסדר של מטריצת התוצאה.

א. BA

ב. $AC+D$

ג. $AE+B$

ד. $AB+B$

ה. $E(A+B)$

ו. EAC

ז. E^tA

ח. $(A^t+E)D$

2) חשבו :

א. $\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$

ב. $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$

ג. $\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}^3+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^3$

ד. $\begin{bmatrix}3&-1&2&1\\0&3&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&-1&-2\\1&1&-1&1\end{bmatrix}^t$

ה. $\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&-1&2\\-1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\-1&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}^t$

ו. $\begin{bmatrix}2i&-1\\-i&1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i&1\\1&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$

ז. $\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\\1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&1\end{bmatrix}$

ח. $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\1&-1&0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

3) נתונים הפולינום $f(t)=2t^2-5t+8$ והמטריצה $A=\begin{pmatrix}5&-3\\1&2\end{pmatrix}$. חשבו את המטריצה $f(A)$,

כלומר חשבו את $f(A)=2A^2-5A+8I$

4) תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת **פיבונאצ'י** (*Fibonacci*) כלומר סדרת המספרים $(1,1,2,3,5,8,13,\dots)$

המוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה $f_1=f_2=1 \quad f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \quad \forall n\ge 1$

הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\begin{bmatrix}f_{n+1}\\f_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

5) תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n\times n$ $(n\geqslant 4)$ בה השורה השלישית היא שורת אפסים ותהא B מטריצה ריבועית מסדר $n\times n$ בההעמודה הרביעית היא עמודת אפסים.
מה תוכלו להגיד על המטריצה AB ? מה תוכלו להגיד על המטריצה BA ?

6) תהא

$$S=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$ חשבו את S^{150} ואת S^{1001}

<u>רמז</u> : מצאו מחזוריות

7) יהיו $a,b,c\in\mathbb{N}$, נאמר שהשלשה $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ היא **שלשה פיתגורית** אם $a^2+b^2=c^2$.

נסמן $T=\left\{\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&2&2\\-2&1&2\\-2&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{pmatrix}\right\}$, הראה שעבור שלשה פיתגורית $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ כלשהי מתקיים:

א. לכל $A\in T$ השלשה $A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ היא שלשה פיתגורית.

ב. עבור $k\in\mathbb{N}$ ולכל $A_1,A_2,\dots,A_k\in T$ (חלקם יכולים להיות שווים) השלשה $(A_1A_2\cdots A_k)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ היא שלשה פיתגורית.

8) יהיו $x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_n$ מספרים ונסמן את המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&1&\dots 1\\y_1&y_2&\dots y_n\end{pmatrix}$
$B=\begin{pmatrix}1&1&\dots 1\\x_1&x_2&\dots x_n\end{pmatrix}$, חשב את A^tB ואת B^tA .

תרגיל 3 באלגברה ליניארית 1 –המטריצה ההפיכה

1) מצא את המטריצה ההפיכה לכל אחת מהמטריצות הפיתגוריות שבעבודה הקודמת.

2) מי מבין המטריצות הבאות היא מטריצה אלמנטרית ? נמקו בקצרה

א. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ב. $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ג. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ד. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ה. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ו. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) לאילו ערכי הפרמטר a המטריצה $\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$ הפיכה ? מהי ההופכית במקרים אלו ?

4) יהיו A ו-B מטריצות ריבועיות מאותו הסדר. הוכיחו את הטענות הבאות - נמקו היטב כל צעד.

א. אם B הפיכה אז לכל n טבעי מתקיים $\left(\mathrm{BAB}^{-1}\right)^n = \mathrm{BA}^n\mathrm{B}^{-1}$

ב. אם B הפיכה אז $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ הפיכה אם ורק אם $\mathrm{I}+\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}$ הפיכה

ג. אם $\mathrm{I}+\mathrm{AB}$ ו-$\mathrm{I}+\mathrm{BA}$ הפיכות אז $\left(\mathrm{I}+\mathrm{AB}\right)^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{A}\left(\mathrm{I}+\mathrm{BA}\right)^{-1}$

ד. אם A, $\mathrm{A}+\mathrm{BB}^t$ ו- $\mathrm{I}+\mathrm{B}^t\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ הפיכות אז $\left(\mathrm{A}+\mathrm{BB}^t\right)^{-1}\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\left(\mathrm{I}+\mathrm{B}^t\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\right)^{-1}$

ה. אם $\mathrm{AB}+\mathrm{BA}=\mathrm{O}$ אז A^2 ו-B מתחלפות בכפל.

5) תהי A מטריצה ריבועית ונניח שקיים n טבעי כך ש $A^n=0$. הראה ש $\mathrm{I}-A$ הפיכה ומתקיים $\left(\mathrm{I}-A\right)^{-1} = I+A+\ldots+A^{n-1}$

6) יהיו A ו-B מטריצות ריבועיות מאותו הסדר כך ש $A^2=B^2=0$ וכן $AB=BA$ מצא n טבעי כך ש $\left(A+B\right)^n=0$.

7) מצאו את המטריצות ההפוכות למטריצות הבאות

א. $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ב. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ג. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

והציגו את המטריצה מסעיף ב כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

העקבה של מטריצה ריבועית $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)$ מסדר n מסומן $\mathrm{tr\,A}$ ומוגדר כסכום כל איברי האלכסון הראשי או $\mathrm{tr\,A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

למשל $tr\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2+(-1)+1=2$

8) תהי A מטריצה מסדר 2×2. הוכיחו (סעיפים א,ג)

א. אם $\mathrm{tr}\, A = 0$ אז A^2 היא מטריצה סקלארית. (כלומר קיים סקלר α כך ש $A=\alpha I$)

ב. $tr\left(A^2\right) = \left(trA\right)^2 \Leftrightarrow$ A לא הפיכה.

ג. אם A ממשית (כלומר איבריה ממשיים) ו- $tr\left(A^t A\right)=0$ אז בהכרח $A=0$.

ד. הכלילו את התוצאה של סעיף ג' <u>לכל</u> מטריצה A ממשית מסדר $n\times m$.

9) תהי A מטריצה ריבועית כך ש $A^{27}=A^{64}=I$. הראה ש $A=I$.

10) יהיו A,B מטריצות ריבועיות הפיכות מסדר $n\geq 2$.

א. נניח ש $(AB)^2 = A^2B^2,\ (AB)^3 = A^3B^3,\ (AB)^4 = A^4B^4$, הראה ש $AB=BA$.

ב*. נניח ש $(AB)^3 = A^3B^3,\ (AB)^4 = A^4B^4,\ (AB)^5 = A^5B^5$, הראה ש $AB=BA$.

.

<u>תרגיל 4 באלגברה ליניארית 1 – דטרמיננטים</u>

1) חשבו את הדטרמיננטות הבאות .

א. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ ד. $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

ה. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ ו. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ ז. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

ח. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ט. $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ י. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \end{vmatrix}$

2) המספרים 255, 527 ו-204 מתחלקים ב-17. הראו, **<u>ללא חישוב ישיר</u>**, כי גם הדטרמיננטה $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ מתחלקת ב-17

<u>רמז</u> : נסו להגיע לצורה $\begin{vmatrix} 204 & * & * \\ 527 & * & * \\ 255 & * & * \end{vmatrix}$

3) תהי $A=\left(a_{ij}\right)$ מטריצה ריבועית מסדר n חשבו את הדטרמיננטים הבאים:

א. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n!$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} 1 & n \quad odd \\ 0 & n \quad even \end{cases}$

ג. $a_{ij} = i + j - 1$ *ד. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}\cdots$

4) הוכיחו את הזהויות הבאות ללא חישוב ישיר :

א. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ב. $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

***5)** האם קיימת מטריצה ריבועית A **מסדר 2** שאיבריה שלמים כך ש $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,

6) תהי A מטריצה ריבועית הפיכה כך שאיברי המטריצות A, A^{-1} שלמים. הראה ש $\det(A) = \pm 1$.

7) לאילו ערכי הפרמטר הממשי x המטריצה הבאה איננה הפיכה $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -1 & x+2 & -3 \\ 1 & -1 & x \end{bmatrix}$

8) תהי A מטריצה ריבועית מסדר 3×3 כך ש $\det \mathrm{A} = -4$. חשבו את

א. $\det(3\mathrm{A})$ ג. $\det(2\mathrm{A}^{-1})$ ה. $\det(\mathrm{A}^3)$

ב. $\det(\mathrm{A}^{-1})$ ד. $\det((2\mathrm{A})^{-1})$ ו. $\det((\mathrm{A}^t)^{-1})$

9) נתון ש $\det \mathrm{B} = \frac{1}{3}$ ו- $\det(\mathrm{A}^t\mathrm{B}^2) = \frac{2}{9}$. חשבו את $\det\left(\mathrm{AB}^t\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^t\mathrm{B}^4(\mathrm{A}^{-1})^t(\mathrm{A}^t)^{-1}\right)$

10) חשבו את A^{-1} תוך שימוש בשיטת ה- adj

א. $A=\begin{bmatrix}3&4\\5&7\end{bmatrix}$ ב. $A=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$

11) יהיו A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$. הוכיחו:

א. אם A אנטי-סימטרית ($A^t=-A$) מסדר אי-**זוגי** אז $\operatorname{adj}A$ סימטרית (כלומר הראו ש $((\operatorname{adj}A)^t=\operatorname{adj}A$).

ב. אם $\det A=1$ אז $\det\left(A^{-1}+\operatorname{adj}A\right)=2^n$.

ג. אם A ו-B הן מסדר 3×3 ומקיימות $AB+BA=O$ אז A לא הפיכה או B לא הפיכה.

ד. $|\operatorname{adj}A|=|A|^{n-1}$

ה. אם A הפיכה אז $adj\left(adjA\right)=|A|^{n-2}A$

*ו. אם A משולשית עליונה אז $\operatorname{adj}A$ משולשית עליונה .

12) תהי $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת **פיבונאצ'י** (*Fibonacci*) כלומר סדרת המספרים $(0,1,1,2,3,5,8,13,\ldots)$ המוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה $f_0=0,\ f_1=1$ $\quad f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ $\forall n\geq1$

א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים $\begin{pmatrix}f_{n+1}&f_n\\f_n&f_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}^n$.

והסיקו ש $f_{n+1}f_{n-1}-\left(f_n\right)^2=(-1)^n$

ב*. חשבו את הסכום $\sum_{k=0}^{n-1}f_k$.

תרגיל 5 באלגברה ליניארית 1 –שדות

1) בעזרת המשפט הקטן של פרמה חשבו את 2^{78} ב $\mathbb{Z}_{13}$ (ללא שימוש במחשב).

2) בנה טבלאות חיבור וכפל לשדה בן 4 איברים תוך שימוש בעובדה שקיים שדה כזה.

3) הראה שבשדה מתקיים $(-a)(-b)=ab$ לכל a,b בשדה.

4) הראה שאם נחבר בשדה סופי את איבר היחידה-1 מספר סופי של פעמים נקבל את הניטרלי-0.

5) פתור את המערכת הבאה $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=3 \end{cases}$ בשדה $\mathbb{Z}_5$.

6) הראה שהקבוצה $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$ שדה.

***7)** עבור n ראשוני נסתכל על השדה Z_n. הראה בעזרת משפט וילסון ש:

א. $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(1\cdot 2\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^2=-1$

ב. הסק שאם $n\equiv 1 \pmod 4$ אז למשואה $x^2=-1$ קיים פתרון.

8) עבור n ראשוני נסתכל על השדה Z_n. הסבר האם ניתן להפוך את הקבוצה $\mathrm{Z}_n\times\mathrm{Z}_n$ לשדה (בין n^2 איברים) בדומה לבניית המרוכבים דרך הממשיים (כאוסף של זוגות סדורים...). הדגם זאת.

***9)** עבור $n\geq 5$ ראשוני חשב את $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}$ ב Z_n.

<u>תרגיל 6 באלגברה ליניארית 1 –מספרים מרוכבים</u>

1) חשב:

א. $i(1+7i)-3i(4+2i)$
ב. $(3-2i)^3$
ג. $(i^7-i^{17})^2$
ד. $(4+5i)^2+(4-3i)^2$
ה. $\frac{10}{1+2i}$
ו. $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$
ז. $\frac{32+7i}{5+2i}$
ח. $\frac{1-17i}{3-i}-\frac{5-9i}{2+7i}$
ט. $\frac{2}{\left(\overline{1+i}\right)(3+i)}$
י. $\frac{i}{(2i+1)(1-i)(1-2i)}$
יא. $|3-2i|$
יב. $\left|-1+\sqrt{3}i\right|$

2) חשבו והביעו את התוצאה בצורה קרטזית

א. $(1+i)^{12}$
ב. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{-6}$
ג. $\left(\sqrt{3}+i\right)^7$
ד. $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{-10}$
ה. $(1+i)^9(1-i)^7$
ו. $\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}}$

3) הוכיחו את הטענות הבאות

א. $\overline{e^{\theta i}}=e^{-\theta i}$
ב. $1+e^{2\theta i}=2e^{\theta i}\cos\theta$
ג. $-1+e^{2\theta i}=2ie^{\theta i}\sin\theta$
ד. $\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}$

4) פתרו את המשוואות הבאות מעל $\mathbb{C}$ ומצאו את z.

א. $z^3=i$
ב. $z^8=1$

5) חשבו את <u>סכום ומכפלת</u> כל שורשי היחידה מסדר m ($m\geq 2$ טבעי)

***6)** יהיו $z_1,z_2,\ldots,z_k$ מספרים מרוכבים כלשהם כך ש $|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_k|=1$. הוכיחו כי

$$|z_1+z_2+\ldots+z_k|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_k}\right|$$

<u>תרגיל 7 באלגברה ליניארית 1 –מרחבים וקטוריים התת-מרחב הנפרש וקבוצות בלתי-תלויות לינארית</u>

1) הראה שבמרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ מתקיימות התכונות הבאות :

א. $0\cdot v=0$ לכל $v\in V$.

כ. $(-1)\cdot v=-v$ לכל $v\in V$.

2) נגדיר על הקבוצה $V=(0,\infty)$ פעולות חיבור וכפל בסקלר באופן הבא: $u\oplus v=uv$, $a\otimes v=v^a$
באשר $a\in\mathbb{R},v,u\in V$ הראה V עם הפעולות הנ"ל מהוה מרחב וקטורי.

3) על איברי $\mathbb{R}^2$ נגדיר פעולות חיבור וכפל בסקלר , בכל סעיף קבע אם $\mathbb{R}^2$ מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ **.**

א. $(a,b)+(c,d)=(a+d,b+c)$ $\quad \alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b)$

ב. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ $\quad \alpha(a,b)=(a,b)$

4) קבע אם הקבוצות הבאות תת-מרחב:

א. $U=\{(a,b,c)|c\ge 0\}$

ב. $U=\{(a,b,c)|a^2+b^2+c^2=1\}$

ג. $U=\{A\in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})|AB=0\}$ באשר B מסדר 3 נתונה.

ד. $U=\{p\in\mathbb{R}_3[x]|p(0)+p(1)=0\}$

ה. $U=\{(a,b,c)||a|\ge|b|\ge|c|\}$

ו. $U=\{A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})|AB=BA\}$ באשר B מסדר n נתונה.

5) יהיו $U,W\subseteq V$ תת-מרחבים, הראה ש- $U\cup W$ תת-מרחב אם ורק אם $W\subseteq U$ או $U\subseteq W$.

6) לאילו ערכי הפרמטר הממשי k הוקטור $\begin{pmatrix}1\\2\\k\end{pmatrix}$ הוא צרוף לינארי של $\begin{pmatrix}k\\6\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\k+1\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ **.**

8) עבור $n\ge 4$, נסמן $\mathfrak{M}=\{X\in M_n(C)|\,adj(X)=I_n\}$. מי מהטענות הבאות נכון? נמק.

א. $\mathfrak{M}$ מכילה $n-1$ איברים.

ב. $\mathfrak{M}$ מכילה אך ורק מטריצות סקלריות .

ג. אם $X_1,X_2\in\mathfrak{M}$ אז בהכרח $X_1X_2\in\mathfrak{M}$.

ד. אם $X_1,X_2\in\mathfrak{M}$ אז בהכרח $X_1+X_2\in\mathfrak{M}$.

9) קבע לאילו ערכי הפרמטר הממשי a הקבוצה הבאה בלתי תלויה לינארית? נמק.

$$\left\{\begin{pmatrix}-3+a\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a-4\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\5\\2a-1\end{pmatrix}\right\}$$

10) יהי $\{u,v,w\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית במרחב וקטורי. קבע אם הקבוצה

$\{3u-2v-w, v+2w, 5u+6v-4w\}$ בלתי תלויה ליניארית

11) מצא קבוצה פורשת לתת-מרחבים הבאים:

א. $\left\{ \begin{pmatrix} 7x_1+2x_2+3x_3 \\ x_1-2x_3 \\ 2x_2-6x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ ב. $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-2x_3=0 \end{array} \right\}$

12) יהיו $U,W \subseteq V$ תת-מרחבים של מרחב-וקטורי V , וכן $A,B \subseteq V$ תת קבוצות של V . הוכח/י או הפרך/י :

א. אם $A \cap B = \varnothing$, $spA \cap spB \neq \{0\}$ אז $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית .

ב. אם $A \cap B = \varnothing$, $spA \cap spB = \{0\}$ אז $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית .

ג. אם $spA \subseteq spB$ אז $A \subseteq B$.

13) יהיו $\mathrm{A},\mathrm{B} \subseteq R^n$ תת-קבוצות סופיות של R^n כך ש- $sp(\mathrm{A}) \cup sp(\mathrm{B}) = R^n$, הראה ש- $sp(\mathrm{B}) = R^n$ או $sp(A) = R^n$.

14) הוכח ש

$$Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_1+x_2-x_3-x_4=0 \right\}$$

15) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהיינה A,B **קבוצות שונות זרות ולא ריקות** של וקטורים מ- V. מי מבין הטענות הבאות נכון , נמק.

א. אם $A \bigcup B$ בלתי תלויה ליניארית, אז בהכרח $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$.

ב. אם A, B בלתי תלויות ליניארית אז בהכרח $A \bigcup B$ בלתי תלויה ליניארית.

ג. אם $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$ אז בהכרח $A \bigcup B$ תלויה ליניארית.

תרגיל 8 באלגברה ליניארית 1 –בסיס ומימד

1) יהיו $U,W\subseteq\mathbb{R}^6$ תת-מרחבים ממימד 4, הראה ש- $U\cap W$ מכיל לפחות שני וקטורים בלתי תלויים ולכל היותר 4 וקטורים בלתי תלויים.

2) יהיו A,B שני מטריצות מסדר n שבהם שורה i של A שווה לעמודה i של B לכל $1\le i\le n$, מה הקשר בין מימד מרח הפתרונות של המערכת ההומוגנית שמתאימה ל-A לבין מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית שמתאימה ל-B ?

3) מצא בסיס ומימד ל- U,W , $U\cap W$ ול- $U+W$, באשר:

$$W=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\\4\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\qquad U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle|\begin{matrix}x_1+x_2=0\\x_3=2x_4\end{matrix}\right\}$$

4) נניח ש- $Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^3$ מהו $Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}\right\}$? הסבר.

5) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף

ש $\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$. מי מהטענות הבאות נכון. נמק.

א. ייתכן ש A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2 .

ב. ייתכן ש A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1 .

ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים .

ד. A בלתי תלויה ליניארית .

6) נתונים תתי-המרחב הבאים של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$U=span\left\{2x^2-x+1,x^2+1,x^2-2x-1\right\}\quad W=span\left\{x^2+3x+1,2x^2+x+1,x^2-2x-2\right\}$$

מצאו בסיסים עבור $U\bigcap W,\ U+W,\ W,U$.

7) א. הראה שאוסף המטריצות המשולשיות עליונות מסדר n מהווה תת- מרחב ל- $M_n(\mathbb{R})$ מעל $\mathbb{R}$ ומצא את מימדו.

ב. השלימו את הקבוצה $\left\{x^3+2,x^2+3x-1,x^2+4\right\}$ לבסיס של $\mathbb{R}_3[x]$.

8) יהיו $U = Sp\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right\}$, $W = Sp\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}\right\}$ תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$ הראה ש $\dim U = \dim W$.

9) יהיו A,B,C,D,E מטריצות ב $M_2(\mathbb{R})$. מי מהטענות הבאות נכון ? נמק.

א. אם הקבוצות $\{B,C,D\},\{A,B,C\}$ בלתי תלויות ליניארית אז הקבוצה $\{A,B,C,D\}$ בלתי תלויה ליניארית.

ב. אם הקבוצה $\{AE,BE,CE,DE\}$ בלתי תלויה ליניארית אז בהכרח E הפיכה.

ג. אם הקבוצה $\{AE,BE,CE,DE\}$ בלתי תלויה ליניארית אז בהכרח E אינה הפיכה.

ד. אם הקבוצה $\{EA,EB,EC,ED\}$ בלתי תלויה ליניארית אז הקבוצה $\{A,B,C,D\}$ בלתי תלויה ליניארית.

10) נתון מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ ועבורו בסיס $B=\{v_1,v_2,v_3\}$. נתונה קבוצת הווקטורים $S=\{v_1-v_2,\ v_2-v_3,\ v_3+v_1\}$ מי מהטענות הבאות נכון ?

א. S בסיס של V.

ב. S אינה בסיס של V.

ג. לא כל איבר של S הוא צירוף לינארי של איברי B.

ד. $\dim(spS)=1$.

11) א. יהיו A,B מטריצות ריבועית מסדר $n\times n$ כך ש-$AB=0$ הראה ש

$$rank(\mathrm{A})+rank(B)\le n$$

ב. תהי A מטריצה ריבועית מסדר n **<u>לא הפיכה</u>** הראה ש $rank(\mathrm{adj}\,\mathrm{A})\le 1$.

12) יהי a מספר ממשי ויהיו $W = Sp\left\{\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}\right\}$, $U = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ שני תת-מרחבים $\mathbb{R}^4$

מהו $\dim(U\cap W)$?

רמז: מצא את $\dim(U+W)$.

13) תהי A מטריצה ריבועית נילפוטנטית מסדר n, הראה ש $A^n=0$ והסק שעבור $n=2$ מתקיים $trA=0$.

תרגיל 9 באלגברה ליניארית 1–העתקות ליניאריות

1) האם קיימת העתקה לינארית $T:R^5\to R^5$ שעבורה $KerT=\operatorname{Im}T$?

2) תהי $T:U\to W$ העתקה ליניארית וכן יהי $\{u_1,u_2,...,u_k\}\subseteq U$ כך ש- $\{Tu_1,Tu_2,...,Tu_k\}$ קבוצה בלתי תלויה ליניארית ב- W. הראה שהקבוצה $\{u_1,u_2,...,u_k\}$ בלתי תלויה ליניארית.

3) תהי $T:U\to W$ העתקה ליניארית ויהי $\{u_1,u_2,...,u_k\}\subseteq U$ קבוצה בלתי תלויה ליניארית. הראה ש- $\{Tu_1,Tu_2,...,Tu_k\}$ קבוצה בלתי תלויה ליניארית ב- W אם ורק אם $Sp\{u_1,u_2,...,u_k\}\cap KerT=\{0\}$

4) נתונה ההעתקה הלינארית $T:\mathrm{M}_n(R)\to \mathrm{M}_n(R)$ המוגדרת על-ידי $T(X)=MX$ באשר M מטריצה נתונה מסדר n ודרגה r , הראה ש- $\dim\operatorname{Im}(T)=nr$

5) בכל אחד מהמקרים הבאים ההעתקה לינארית , מצא בסיס ומימד לגרעין ולתמונה שלה .

$T:R^5\to R^3$ מוגדרת על-ידי $T(x)=Ax$ באשר $A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1\\2&3&-1&1&-2\\-2&0&-5&3&4\end{pmatrix}$

$T:\mathrm{M}_n(R)\to \mathrm{M}_n(R)$ מוגדרת על-ידי $T(X)=X-X^t$

$T:C\to C$ מוגדרת על-ידי $T(z)=\bar{z}$ (הצמוד) .

תרגיל 10 באלגברה לינארית-העתקות לינאריות (המשך)

(1) מצאו טרנספורמציה לינארית T המקיימת הדרישות (אם קיימת)

א. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המקיימת $T(0,1)=(2,1,-1)$ $T(1,2)=(3,-1,5)$.

ב. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המקיימת $T(0,0,1)=2$ $T(0,1,-2)=1$ $T(1,1,1)=3$.

ג. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המקיימת $T(3,2,1)=-1$ $T(1,2,3)=1$.

ד. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המקיימת $T(0,1,0)=(1,0)$ $T(1,0,0)=(0,1)$ $T(4,8,0)=(8,5)$ $T(1,2,0)=(2,2)$

ה. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המקיימת $T(1,2,3)=(4,5,6)$ $T(1,0,-1)=(\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{3}{2})$ $T(3,2,1)=(7,8,9)$

ו. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ שתמונתה נפרשת ע"י $\{(1,2,0,-4),\ (2,0,-1,-3)\}$.

ז. $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^2$ שגרעינה נפרש ע"י $\left\{\begin{matrix}(1,2,3,4,5) & (4,0,1,1,1)\\ (5,4,3,2,1) & (-1,8,7,8,9)\end{matrix}\right\}$

(2) א. ייצג/י כ"א מהטרנספורמציות שלמטה (בסוף העמוד) ע"י הבסיסים הסטרנדרטיים של $\mathbb{R}^4$.

ב. ייצג/י כ"א מהטרנספורמציות שלמטה ע"י הבסיסים הבאים:

בסיס ל

$\mathbb{R}$: $v=\{v_1=(\frac{1}{2})\}$

$\mathbb{R}^2$: $v=\{v_1=(1,-1)\quad v_2=(1,1)\}$

$\mathbb{R}^3$: $v=\{v_1=(-1,1,1)\quad v_2=(1,-1,1)\quad v_3=(1,1,-1)\}$

$\mathbb{R}^4$: $v=\{v_1=(1,1,0,0)\quad v_2=(0,1,1,0)\quad v_3(0,0,1,1)\quad v_4=(0,0,0,1)\}$

$\mathbb{R}^5$: $v=\{v_1(1,1,1,1,1)\quad v_2=(0,1,1,1,1)\quad v_3=(0,0,1,1,1)\quad v_4=(0,0,0,1,1)\quad v_5=(0,0,0,0,1)\}$

ג. ייצג/י כ"א מהטרנספורמציות הנ"ל ע"י בסיסים באופן מעורב

[כלומר: סעיף א' $[T]_e^e$, סעיף ב' $[T]_v^v$, סעיף ג' $[T]_e^v$ וגם $[T]_v^e$]

(3) עבור המרחבים $\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^5$ חשב/י מטריצות מעבר בין הבסיסים $[I]_e^v$ $[I]_v^e$.

$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad T_1(x,y) = (-x+2y, -3x+y, 7x-y)$

$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad T_2(x,y,z) = -4x+5y+2z$

$T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad T_3(x,y,z) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$

$T_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad T_5(x,y,z) = (\frac{17}{8}x + \frac{5}{8}z,\ \frac{19}{8}x + \frac{7}{8}z,\ \frac{21}{8}x + \frac{9}{8}z)$

$T_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \quad T_6(x,y,z) = (x+2y,\ 2x, -y, -4x-3y)$

$T_7 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2 \quad T_7(x,y,z,s,t) = (\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{9}{5}z + s,\ \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{13}{5}z + t)$