אינפי 4 - הרצאה 2

3 באוגוסט 2011

תכולה של קבוצה (אורך, שטח, נפח וכו')

הגדרה

תיבה היא קבוצה מהצורה $I_1\times I_2\times...\times I_n\subseteq\mathbb{R}^n$, כאשר לכל n טבעי ולכל $1\le i\le n$, I_i הוא קטע סופי ב-$\mathbb{R}$.

הגדרה

התכולה של תיבה סגורה $T=[a_1,\,b_1]\times...\times[a_n,\,b_n]$ מוגדרת להיות:

$$V\left(T\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)$$

הערה

גם אם חלק מהקטעים הם פתוחים או חצי פתוחים, התכולה נשמרת.

הרחבת ההגדרה לקבוצות חסומות כלשהן ב-$\mathbb{R}^n$

תהי A קבוצה חסומה ב-$\mathbb{R}^n$.
נאמר כי A בעלת תכולה, עם תכולה $V\left(A\right)$ אם לכל $\epsilon>0$ יש:

1. תיבות $T_1,\,...,\,T_p\subseteq A$ שאינן נחתכות (זרות בזוגות) כך ש-$\sum_{i=1}^{p}V\left(T_i\right)>V\left(A\right)-\epsilon$.
2. תיבות $S_1,\,...,\,S_q\subseteq A$ כך ש-$A\subseteq\bigcup_{i=1}^{q}S_i$ המקיימות $\sum_{i=1}^{q}V\left(S_i\right)<V\left(A\right)+\epsilon$.

הערה

לא לכל קבוצה יש תכולה. אפילו ב-$\mathbb{R}^2$ יש קבוצות ללא תכולה. למשל:

$$S=\left\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\mid x,\,y\in[0,\,1]\cap\mathbb{Q}\right\}$$

כאן, כל תיבה (מלבן) המכיל את S חייב להיות בעל תכולה 1 לפחות.
מצד שני, S מכיל רק תיבות מנוונות שסכום תכולתן הוא 0.
לכן, $V\left(S\right)$ לא קיים.

הגדרה אחרת לתכולה

קבוצה חסומה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ היא בעלת תכולה $V\left(A\right)$ אם לכל $\epsilon>0$ יש תיבות $T_1,\,...,\,T_p$ שאינן נחתכות ומוכלות בA ותיבות $S_1,\,...,\,S_q$ שאיחודן מכיל את A, כך שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{q}V\left(S_i\right)-\sum_{j=1}^{p}V\left(T_j\right)<2\epsilon$$

מקרה פרטי - תכולה 0

קבוצה A היא בעלת תכולה 0 אם ורק אם לכל $\epsilon>0$ יש תיבות $S_1,\,...,\,S_p$ כך ש-$A\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{p}S_i$ ו-$\sum\limits_{i=1}^{p}V\left(S_i\right)<\epsilon$.
ז"א ניתן לכסות את A בעזרת תיבות שתכולתן הכוללת קטנה ככל שנרצה. (התנאי השני מתקיים ממילא).

דוגמה

כל קבוצה סופית של נקודות ב$\mathbb{R}^2$ היא בעלת תכולה 0.

הוכחה

נניח שבקבוצה A יש N נקודות.
יהי $\epsilon>0$. נבנה ריבועים שמרכזיהם בנקודות הנ"ל ואורך צלעותיהם $\sqrt{\frac{\epsilon}{2N}}$.
ריבועים אלה מכסים את A. שטח כל ריבוע הוא $\frac{\epsilon}{2N}$.
סכום שטחי הריבועים הוא $\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$ ולכן A בעלת תכולה 0.

דוגמה

כל קטע המקביל לציר x או לציר y ב$\mathbb{R}^2$ היא קבוצה בעלת תכולה 0.

הוכחה

לקטע באורך L ניקח מלבן שאורכו L ורוחבו $\frac{\epsilon}{2L}$ המכיל את הקטע, שטח המלבן קטן מϵ לכן הקטע הוא בעל תכולה 0.

איך מחשבים תכולת קבוצה בפועל?

מחשבים תכולה של קבוצה באמצעות אינטגרל.

נזכור שבהינתן פונקציה $f\,:\,I\to\mathbb{R}$ (כאשר $I=[a,\,b]$), האינטגרל המסוים $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ נותן את השטח שמתחת לגרף של f.
באופן דומה, עבור $f\,:\,\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נגדיר:

$$O_f=\left\{\left(x_1,\,...,\,x_{n+1}\right)\;|\;0<x_{n+1}\leq f\left(x_1,\,..,\,x_n\right)\right\}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$$

למשל, ב$\mathbb{R}$:

$$O_f=\left\{\left(x,\,y\right)\;|\;0<y\leq f\left(x\right)\right\}$$

כדי שO_f תהיה חסומה, עלינו לדרוש שf תהיה חסומה, ושיהיה ל-f תומך חסום.
f חסומה כלומר קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\left|f\left(x\right)\right|\leq M$$

f בעלת תומך חסום, כלומר קיימת תיבה $T \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש:

$$\forall x \notin T \quad f(x) = 0$$

אנו נגדיר את האינטגרל רק עבור פונקציות חסומות ובעלות תומך חסום.
בהינתן פונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, נגדיר את החלק החיובי ואת החלק השלילי של f כך:

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{0, f(x)\} \\ f^-(x) &= \max\{0, -f(x)\} \end{aligned}$$

קל לראות שמתקיים:

$$f = f^+ - f^-$$

עבור f חסומה בעלת תומך חסום ב־$\mathbb{R}^n$ נגדיר אינטגרל של f ב־$\mathbb{R}^n$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f = V\left(O_{f^+}\right) - F\left(O_{f^-}\right)$$

שימו לב שייתכן שהאינטגרל יהיה שלילי.
אם f חיובית, אז $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f$ הוא הנפח של התחום ב־$\mathbb{R}^{n+1}$ הנמצא <u>מתחת</u> לגרף של f ומעל $\mathbb{R}^n$.
אחרת, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f$ הוא הפרש הנפחים של החלקים המתאימים.
כדי להגדיר אינטגרל על קבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$, נשתמש בפונק' אופיינית:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

נגדיר:

$$\int\limits_A f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \cdot \varphi_A$$

זהו האינטגרל המרובה המוכר מאינפי 3.

טענה

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_A = V(A)$$

(ז"א לוקחים בהגדרת האינטגרל $f = 1$).

הוכחה

נניח ש־$\bigcup\limits_{i=1}^{p} T_i \subseteq A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{q} S_j$ כאשר $\{T_i\}_{i=1}^{p}$ תיבות זרות בזוגות ב־$\mathbb{R}^n$ ו־$\{S_j\}_{j=1}^{q}$ תיבות ב־$\mathbb{R}^n$, כך שמתקיים:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{q} V(S_j) &< V(A) + \epsilon \\ \sum_{i=1}^{p} V(T_i) &> V(A) - \epsilon \end{aligned}$$

נגדיר:

$$\begin{aligned} S_j' &= S_j \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \\ T_i' &= T_i \times (0,1] \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

אזי

$$\bigcup_{i=1}^{p} T_i' \subseteq O_{\varphi_A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{q} S_j$$

ועדיין מתקיים:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} V\left(T_i'\right) &> V(A) - \epsilon \\ \sum_{j=1}^{q} V\left(S_j'\right) &< V(A) + \epsilon \end{aligned}$$

לכן:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_A = V\left(O_{\varphi_A}\right) = V(A)$$

שינוי תכולה ע"י העתקה לינארית

אם $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה בעלת תכולה, ונניח ש-$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ העתקה לינארית. איך תיראה התכולה של $T(A)$?

תזכורת

מטריצת ייצוג - נניח ש-$E = e_1, ..., e_n \in \mathbb{R}^n$ **בסיס סטנדרטי**, ו-$B = b_1, .., b_n \in \mathbb{R}^n$ בסיס כלשהו, אז נגדיר מטריצה מייצגת $[T]_B^E$ כך:

$$[T]_B^E = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ T(b_1) & T(b_2) & \cdots & T(b_n) \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

דוגמה

ניקח העתקה לינארית

$$T(x, y) = (x + y, x - 2y)$$

ובסיסים:

$$\begin{aligned} B &= \{(1,1), (2,3)\} \\ E &= \{(1,0), (0,1)\} \end{aligned}$$

נחשב:

$$\begin{aligned} T(b_1) &= (2, -1) \\ T(b_2) &= (5, -4) \\ [T]_B^E &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

משפט

תהי $T:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית ותהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ בעלת תכולה אזי:

$$V\left(T\left(A\right)\right)=\left|\det\left(T\right)\right|\cdot V\left(A\right)$$

כאשר $\det\left(T\right)=\det\left[T\right]_E^E$.

הוכחה

תחילה, אם $\det\left(T\right)=0$ אז העמודות של המטריצה המייצגת $\left[T\right]_E^E$ (לפי הבסיס הסט-נדרטי גם בתחום וגם בטווח) תלויות לינארית.
משמעות הדבר היא שהתמונה של T היא תת מרחב ממש של $\mathbb{R}^n$, ותכולה של תת מרחב ממש של $\mathbb{R}^n$ היא 0 (הוכיחו!), ואז המשפט מתקיים.
לכן נוכל להניח מעתה ש$\det\left(T\right)\neq0$.
במקרה זה נוכל להציג את $\left[T\right]$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות:

$$\left[T\right]=A_1\cdot...\cdot A_k$$

כאשר A_k מטריצות אלמנטריות (מייצגות החלפת שורה, הכפלת שורה והוספת שורה).
כלומר T היא הרכבה של פעולות אלמנטריות $T_1,\ ...,\ T_k$.
נראה שכל העתקה אלמנטרית E מקיימת

$$V\left(EB\right)=\left|\det\left(E\right)\right|\cdot V\left(B\right)$$

מכאן נקבל:

$$\begin{aligned}V\left(T\left(B\right)\right) &= V\left(\left(T_1\circ T_2\circ...\circ T_k\right)B\right)\\ &= V\left(T_1\left(T_2\circ...\circ T_k\right)B\right)\\ &= \left|\det T_1\right|V\left(\left(T_2\circ...\circ T_k\right)B\right)\\ &= \left|\det T_1\right|\cdot\left|\det T_2\right|\cdot...\cdot\left|\det T_k\right|\cdot V\left(B\right)\\ &= \left|\det\left(T_1\cdot...\cdot T_k\right)\right|V\left(B\right)\\ &= \left|\det\left(T\right)\right|V\left(B\right)\end{aligned}$$

נותר להראות שפעולה אלמנטרית מקיימת את הנוסחה

$$V\left(EB\right)=\left|\det\left(E\right)\right|V\left(B\right)$$

למשל ניקח E העתקה שמתאימה להחלפת שורות, למשל מטריצת פרמוטציה כזו:

$$E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

כאן $\left|\det E\right|=1$, וזה לא משנה את התכולה, כיוון שהחלפת הקואורדינטות לא משנה את התכולה.
אם E מתאימה להכפלה בסקלר λבאחת הקואורדינטות, למשל:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

אם B היא תיבה, אחד האורכים גדל פי λ ולכן

$$\begin{aligned} V\left(E\left(B\right)\right) &= \left|\lambda\right| V\left(B\right) \\ &= \left|\det\left(E\right)\right| \cdot V\left(B\right) \end{aligned}$$

אם B לאו דווקא תיבה, לפי הגדרת התכולה נובע כי עדיין $V\left(E\left(B\right)\right) = \left|\lambda\right| V\left(B\right)$.
נותר להתבונן בהעתקות עם המטריצה:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר יש מקום אחד מחוץ לאלכסון שבו יש מס' שונה מ-0.
תחילה נראה שE שומרת על נפח של תיבה.
נגדיר:

$$I = \left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \left[a_1, b_i\right], 1 \leq i \leq n\right\}$$

נניח בלי הגבלת הכלליות:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

אזי מתקיים:

$$E\left(x_1, .., x_n\right) = \left(x_1 + x_2, x_2, .., x_n\right)$$

נכתוב $I = I^{'} \times I^{''}$ כאשר $I^{'} \subseteq \mathbb{R}^2$ ו$I^{''} \subseteq \mathbb{R}^{n-2}$, אזי:

$$E\left(I\right) = I^* \times I^{''}$$

איך מתקבל I^*? המלבן $I^{'}$ הופך למקבילית, אך השטח שלו נשאר שווה לכן:

$$\begin{aligned} V\left(E\left(I\right)\right) &= V\left(I^* \times I^{''}\right) \\ &= V\left(I^*\right) \cdot V\left(I^{''}\right) \\ &= V\left(I^{'}\right) \cdot V\left(I^{''}\right) \\ &= V\left(I\right) \end{aligned}$$

לכן E שומר על נפח תיבה.
(זו לא הוכחה מדויקת אלא אינטואיציה גאומטרית. הוכחה מדויקת מתבססת על אינטגרלים).
אם B בעלת תכולה אבל לאו דווקא תיבה, ניקח $\epsilon > 0$ כלשהו וניקח $I_1, .., I_p$ תיבות

זרות בזוגות ו$J_1, .., J_q$ תיבות, כך שמתקיים

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{p} I_i &\subseteq B \subseteq \bigcup_{j=1}^{q} J_j \\
\sum_{i=1}^{p} V\left(I_i\right) &> V\left(B\right) - \epsilon \\
\sum_{j=1}^{q} V\left(J_j\right) &< V\left(B\right) + \epsilon
\end{aligned}$$

הפעולה האלמנטרית שומרת על נפח תיבה לכן נקבל

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{p} E\left(I_i\right) &\subseteq E\left(B\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{q} E\left(J_j\right) \\
\sum_{i=1}^{p} V\left(E\left(I_i\right)\right) &= V\left(I_i\right) > V\left(B\right) - \epsilon \\
\sum_{j=1}^{q} V\left(E\left(J_j\right)\right) &= V\left(J_j\right) < V\left(B\right) + \epsilon
\end{aligned}$$

לכן E שומרת גם על נפח קבוצה שאינה תיבה.
הוכחנו שפעולות אלמנטריות מקיימות:

$$V\left(E\left(B\right)\right) = \left|\det\left(E\right)\right| \cdot V\left(B\right)$$

ולכן המשפט מתקיים.
ממשפט זה נוכל להסיק כמה מסקנות, את חלקן נוכיח.

משפט (נוסחת החלפת משתנים כללית)

יהי Q תחום ב$\mathbb{R}^n$ ותהי $T:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ העתקה גזירה ברציפות והפיכה בסביבת Q.
אם $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית אז $f \circ T$ גם אינטגרבילית ומתקיים:

$$\int\limits_{T(Q)} f = \int\limits_{Q} f \circ T \cdot \left|J_T\right|$$

כאשר J_T יעקביאן ההעתקה.
(לא נוכיח משפט זה).

דוגמה

נחשב את שטח הטבעת:

$$D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < \sqrt{x^2 + y^2} < 3\right\}$$

פתרון

נהפוך לקואורדינטות פולריות:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ J &= r \\ 2< & \; r \; < 3 \\ 0\le & \; \theta \; \le 2\pi \end{aligned}$$

נסמן $D^*=\{(r,\theta)\ \mid 2<r<3,\,0\le\theta\le2\pi\}$

שטח הטבעת הוא:

$$\begin{aligned} V(D) &= \int\limits_D 1dxdy \\ &= \int\limits_{D^*} rdrd\theta \\ &= \int\limits_2^3 rdr\int\limits_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_2^3 \\ &= 5\pi \end{aligned}$$

הגדרה (מקבילון)

יהיו $v_1,\,..,\,v_k\in\mathbb{R}^n$. נגדיר את המקבילון ה-$k$-מימדי להיות:

$$P=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid x=\sum_{i=1}^k t_iv_i,\ t_i\in[0,1]\right\}$$

הערה

ב-$\mathbb{R}^3$, אם נתונים $v_1,\,v_2$ וקטורים בת"ל, המקבילית שהם פורשים, תכולתה $= |v_1\times v_2|$ $\left|\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ v_{1_x} & v_{1_y} & v_{1_z}\\ v_{2_x} & v_{2_y} & v_{2_z}\end{pmatrix}\right|$.

(שימו לב - כשמדברים על תכולה של מקבילית ב-$\mathbb{R}^3$ מדברים על השטח שלה במישור, לא לתכולה שלה ב-$\mathbb{R}^3$ כי התכולה היא 0).

משפט

יהי $P(v_1,\,..,\,v_n)$ מקבילון ממימד n ב-$\mathbb{R}^n$, אזי:

$$V(P)=|\det(A)|$$

כאשר A היא המטריצה שעמודותיה הן $v_1,\,..,\,v_n$.

הוכחה

נסמן:

$$Q = P\left(e_1, .., e_n\right)$$

ברור ש$V\left(Q\right)=1$, שהרי זוהי תיבת היחידה.
כעת, ההעתקה הלינארית $T\left(e_i\right)=v_i$ מעתיקה את Q אל P.
לפי המשפט שהוכחנו:

$$V\left(P\right) = \left|\det\left(T\right)\right| \cdot V\left(Q\right) = \left|\det\left(T\right)\right|$$

כאשר $\det\left(T\right)$ היא הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת $\left[T\right]_E^E$, וזו בדיוק A, לכן קיבלנו:

$$V\left(P\right) = \left|\det\left(A\right)\right|$$

הערה

התכולה של מקבילון הנפרש ע"י k וקטורים $(k<n)$ ב$\mathbb{R}^n$ היא כמובן 0.
אבל בכל זאת, יש משמעות לשטח של <u>מקבילית</u> (מקבילון ממימד קטן מn) הנפרשת, למשל, ע"י 2 וקטורים ב$\mathbb{R}^3$, שכן נוכל להסתכל על המישור שהם פורשים ולחשב את השטח שבתוכו.
באותו אופן, נוכל לדבר על תכולה k מימדית של מקבילון ב$\mathbb{R}^n$ הנפרש על ידי k וקטור-ים.

הגדרה

תהי B תת קבוצה של תת מרחב k מימדי V ב$\mathbb{R}^n$ $(k<n)$.
נבחר בסיס אורתונורמלי עבור V: $b_1, ..., b_k$.
נגדיר העתקה לינארית:

$$\begin{array}{rcl} T:\ V & \to & \mathbb{R}^k \\ T\left(b_i\right) & = & e_i \\ 1 \leq & i & \leq k \end{array}$$

השטח ה-k-מימדי של B יהיה:

$$V_k\left(B\right) = V\left(T\left(B\right)\right)$$

תרגיל

הוכיחו שההגדרה הנ"ל אינה תלויה בבסיס האורתונורמלי $b_1, .., b_k$.

משפט

אם $P = P\left(v_1, .., v_k\right)$ מקבילון ב$\mathbb{R}^n$ $(k<n)$ אזי:

$$V_k\left(P\right) = \sqrt{\det\left(A^t A\right)}$$

כאשר A היא המטריצה מסדר $n \times k$ שעמודותיה הן הוקטורים $v_1, ..., v_k$.
הוכחת המשפט מבוססת על משפט Cauchy-Binet, שההוכחה המסודרת שלו תבוא בהמשך הקורס (באמצעות תבניות דיפרנציאליות).

הערה

אם $n=k$ אז אנו חוזרים למשפט הקודם, כיוון שאז A ריבועית ומתקיים:

$$\begin{aligned}\sqrt{\det\left(A^tA\right)} &= \sqrt{\det\left(A^t\right)\det\left(A\right)}\\ &= \sqrt{\det\left(A\right)^2}=\left|\det\left(A\right)\right|\end{aligned}$$

סימון

אם A מטריצה מסדר $n\times k$ ו-$I=(i_1,..,i_k)$ סדרה של k מספרים מתוך $\{1,..,n\}$
אז A_I היא המטריצה $k\times k$ כך שהשורה ה-r שלה היא השורה הi_r של A.

דוגמה

ניקח למשל

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix}5&6&7\\1&2&3\\8&9&10\\11&12&13\end{pmatrix}\\ I &= (4,2,1)\end{aligned}$$

אזי:

$$A_I=\begin{pmatrix}11&12&13\\1&2&3\\5&6&7\end{pmatrix}$$

משפט Cauchy-Binet (ללא הוכחה)

אם A מטריצה מסדר $n\times k$ וB מטריצה מסדר $k\times n$, כאשר $k\leq n$ אז:

$$\det\left(A\cdot B\right)=\sum_{[I]}\det\left(A_I^t\right)\det\left(B_I\right)$$

כאשר $[I]$ רץ על כל הסדרות ה<u>עולות ממש</u> של k-יות מתוך $\{1,...,n\}$.

דוגמה

ניקח $A_{2\times3}$ ו$B_{3\times2}$:

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\\ B &= \begin{pmatrix}7&8\\9&10\\11&12\end{pmatrix}\\ AB &= \begin{pmatrix}58&64\\139&154\end{pmatrix}\\ |AB| &= 36\end{aligned}$$

$[I]$ הן הסדרות העולות של זוגות מתוך $\{1, 2, 3\}$:

$$[I] \quad = \quad \{(1, 2)\,, (1, 3)\,, (2, 3)\}$$

את המשך החישוב - לעשות לבד.