הסתברות הרצאה - 26/2 - 1

האי־מייל של המרצה - simi@biu.ac.il.

או 10% תרגיל, 10% בוחן, 80% מבחן =ציון.
10% , - , 90% מבחן

ספרים: * Sheldon Ross, A first course in Probability (8'th edition)

0. introduction ← * Uzi Vishne, notes.

$P \to -\log_2 P$

$3,\dots,26,\dots,400$

1. קומבינטוריקה (combinatorics):

דוגמא - מערכת אנטנות - כוללת n אנטנות - מסודרות בשורה. המערכת מתפקדת כל עוד אין שתי אנטנות סמוכות תקולות. ידוע ש-m תקולות. מה הסיכוי שהמערכת מתפקדת?

0 - אנטנה תקולה $n=4,\ m=2$

1 - אנטנה תקינה

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{cccc} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&1&1&0 \end{array}\right\} \text{מערכת תקינה} \\ \left.\begin{array}{cccc} 0&0&1&1\\ 1&0&0&1\\ 1&1&0&0 \end{array}\right\} \text{לא תקינה} \end{array}$$

* שלושה משישה מצבים תקינים - ולכן $3/6 = 1/2$

עקרון הכפל - אם ניתן לתאר איברי קבוצה בעזרת תהליך שבו r שלבים ובשלב ה-i בוחרים אחת מ-n_i אפשרויות - אז גודל הקבוצה הוא $\prod_{i=1}^{r} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$.

1.1 תמורות:

← בכמה דרכים ניתן לסדר את המספרים $1,2,\dots,n$ בשורה?

עקרון הכפל $n\cdot(n-1)\cdots 1 = \prod_{i=1}^{n} i =: n!$

הגדרה: $n! = \prod_{i=1}^{n} i$, $0! = 1$

← מס הדרכים לסדר בשורה n עצמים, כאשר n_1 מתוכם נחשבים זהים מסוג 1, n_2 זהים מסוג שני, ..., n_r זהים מהסוג ה-r. (נניח $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$)

= עקרון הכפל $\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$

דוגמא - כמה מחרוזות שונות ניתן להרכיב מהאותיות: PEPPER?

$\frac{6!}{3!\,2!\,1!}$ מחרוזות שונות.

הסתברות הרצאה - שבוע - 2

1.2 ארבע בעיות ספירה:

← בכמה דרכים ניתן לבחור k מספרים מהקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$?

תלוי;

	עם חזרות	בלי חזרות
עם חשיבות לסדר	n^k (וקטורים)	$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$
ללא חשיבות לסדר	$\binom{k+n-1}{n-1}$ או $\binom{k+n-1}{k}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ תת קבוצות

1.3 המקדמים הבינומיים:

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ אם $k<0$ או $k>n$ אז $\binom{n}{k}=0$.

דוגמא - 5 נשים, 7 גברים. צריך לבחור 2 נשים, 3 גברים. $\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3}=350$.

ומה אם רון וקטי לא רוצים להיות יחד? $\underbrace{\binom{2}{2}\binom{5}{1}}_{\text{שניהם ביחד}}=5 \longrightarrow \left(\binom{7}{3}-5\right)\binom{5}{2}=300$.

יחד - כללי, נשים כללי

← בכמה סדרות באורך n של אפסים ואחדות יש k אפסים? $\binom{n}{k}$ בוחרים תת קבוצה של האינדקסים.

← בכמה דרכים ניתן לחלק k כדורים זהים ל-n תאים שונים?

$1 \; 2 \; \dots \; n$

* יש התאמה בין חלוקות כנ"ל לבין סדרות של 1,0 באורך $n-1+k$ בהן k אפסים.

הוכחה - ההפיכות קלה. מס' הסדרות האלו הוא: $\binom{n-1+k}{k}$ ← מס' אפסים (כדורים)

מחיצה

$000|| 0 | \dots | 00|$

ההתאמה מסדרות לחלוקות: עבור $i\geq 2$, נשים בתא ה-i כדורים כמס' האפסים בין האחד ה-i והאחד ה-$(i-1)$. בתא הראשון מס' הכדורים יהיה מס' האפסים עד האחד הראשון. בתא האחרון מס' הכדורים יהיה מס' האפסים מהאחד האחרון.

תרגיל עצמי: מצאו התאמה חד-חד ערכית ועל בין חלוקות של k כדורים זהים ל-n תאים לבין בחירות של k מספרים מ-$\{1,2,\dots,n\}$ עם חזרות וללא חשיבות לסדר.

פתרון לבעיית האנטנות: $n-m$ תקינות

$1 \; 2 \; 3 \; 4 \; \dots \; n-m+1$

$0|0|x|x|0|\cdots| \; |$ $n-m$ ⟸ $\binom{n-m+1}{m}$ - מקומות - תאים מתוך הכלל שאני שמה בהם אנטנות.

בלי אנטנה

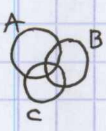
משפט: בינום של ניוטון. $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{(n-k)}$

הסתברות הרצאה - 27/2 - 1

1.4 Inclusion-Exclusion: (נוסחת ההכלה וההדחה).

← אם A ו-B קבוצות זרות אז - $|A\cup B|=|A|+|B|$. (עקרון הסכום).

← לכל 2 קבוצות A,B - $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.



לכל 3 קבוצות A,B,C - $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

משפט: (נוסחת ההכלה וההדחה). יהיו $A_1,\dots,A_n$ קבוצות. אזי -

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1}\cdot\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

← תתי קבוצות של 1 עד n.

הוכחה: יהי $x\in\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. נסמן - $J=\{i \mid x\in A_i\}$.

← x יופיע ב- $\bigcap_{i\in I} A_i$ בדיוק כאשר $I\subseteq J$.

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ I\subseteq J}} (-1)^{|I|-1}\cdot 1=\sum_{i=1}^{t=|J|}(-1)^{i-1}\sum_{\substack{I\subset J\\ |I|=i}} 1=\sum_{i=1}^{t}(-1)^{i-1}\binom{t}{i}=-\sum_{i=1}^{t}(-1)^{i}\binom{t}{i}=1-\sum_{i=0}^{t}(-1)^{i}\binom{t}{i}=1-\underbrace{(1-1)^{t}}=1$$

- להשלים מחש.

דוגמא - יהיו X,Y קבוצות. $|X|=n$, $|Y|=m$.

כמה פונקציות יש מ-X על Y?

← נגדיר לכל $y\in Y$, $A_y=\{f:X\to Y \mid y\notin Im(f)\}$

$\bigcup_{y\in Y} A_y=$ אוסף הפונקציות שאינן על.

מש-i: (מהכלה והדחה)

$$\left|\bigcup_{y\in Y} A_y\right|=\sum_{I\subset Y}(-1)^{|I|-1}\cdot\left|\bigcap_{y\in I} A_y\right|=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\cdot(m-i)^{n}\binom{m}{i}$$

נשים ♡ כי - $\left|\bigcap_{y\in I} A_y\right|=(m-|I|)^{n}$, כי כל איבר של x מותאם לאחד מאברי Y/I.

מס' הפונקציות מ-X ל-Y הוא m^n.

← נרשום: $m^n=(-1)^0\binom{m}{0}\cdot(m-0)^n$

$$m^n-\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\binom{m}{i}(m-i)^n=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{i}\binom{m}{i}(m-i)^n$$

← מספר הפונקציות מ-X על Y.

אם $|X|=|Y|=n$ אז מקבלים: $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}(n-i)^n=n!$ (אוילר).

2. Discrete Probability Spaces (מרחבי הסתברות בדידים):

← תזכורת: אם טור מתכנס בהחלט סכומו אינו תלוי בסדר הסכימה.

הגדרה: מרחב הסתברות בדיד הוא זוג סדור (Ω,P) כאשר Ω קבוצה בת-מניה ו- $P:\Omega\to\mathbb{R}$ פונקציה אי-שלילית המקיימת $\sum_{x\in\Omega}P(x)=1$.

* הערה - הסכום מוגדר מהתזכורת.

← Ω נקראת מרחב המדגם (sample space), P נקראת פונק' הסתברות (Probability function).

הסתברות הרצאה - 27/2 - 2

דוגמא - Ω סופית, $|\Omega|=n$, $P(x)=\frac{1}{n}$ $\forall x\in\Omega$.

(הטלת מטבע, הטלת קוביה, קלף מחפיסה (מעורבבת היטב) ...).

דוגמא - $\Omega=\mathbb{N}$, $P(n)=2^{-n}$, למשל: מס' הטלות מטבע עד קבלת עץ בפעם ה-1.

$\leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$.

* הערה: ניתן להרחיב את הדוגמא הקודמת: $\Omega=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$

$$P(x)=\begin{cases}2^{-x} & , x\in\mathbb{N}\\ 0 & , x=\infty\end{cases}$$

$\leftarrow$ אין טעם בנקודות שהסתברות 0.

הגדרה: במרחב הסתברות בדיד, תת-קבוצה של מרחב המדגם נקרא מאורע (event).

$\leftarrow$ נגדיר הרחבה של P כך: $\underbrace{P:\mathcal{P}(\Omega)}_{\text{קבוצה חזקה}}\to\mathbb{R}$, $P(A)=\sum_{x\in A}P(x)$.

$\leftarrow$ הערה: הסכום מוגדר היטב.

טענה: $P:\mathcal{P}(\Omega)\to\mathbb{R}$ מקיימת: 1. $P(\Omega)=1$. $\leftarrow$ מהדרישה $\sum_{x\in\Omega}p(x)=1$.

2. אם $A_1,A_2\ldots$ זרות בזוגות אזי: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

$\Leftarrow$ שינוי סדר סכימה של טור מתכנס בהחלט.

* הערה: 2. מתקיים גם לסדרה סופית, אם ניקח $A_n=\emptyset$ לכל $n>N$.

$\leftarrow$ מאורעות נקראים זרים אם $A\cap B=\emptyset$ (זרות). לפעמים מספיק ש- $P(A\cap B)=0$.

טענה: לכל A,B מתקיים: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

בדומה ניתן להכליל את נוסחת ההכלה וההדחה.

משפט: (נוסחת ההכלה והדחה ההסתברותית).

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}P\left(\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j}\right)\longrightarrow$$ ההוכחה זהה.

הסתברות הרצאה - 5/3 - 1

תזכורת - $P(\bigcup A_i)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}P(\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j})$

דוגמא - Dearrangements (אי סדר מלא)

← מה הסיכוי לבחור תמורה של $(1,2\dots n)$ בה אף איבר אינו במקומו (בוחרים תמורה באקראי מאוסף התמורות).

פתרון - A_i - תמורות בהן i בן במקומו: $P((A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)^c)$ - צריך לחשב

דה-מורגן: $(\bigcup A_i)^c=\bigcap A_i^c$

← הבחנה: $P(\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j})=\frac{(n-k)!}{n!}$

$$P((\bigcup A_i)^c)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}P(\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j})=$$

← לפי חוקי דה-מורגן $1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dots=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\dots=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}$ (כיוון שכאשר $k=0$ אז $(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}=1$)

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot\frac{(n-k)!}{n!}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{e}$$ (התכנסות מהירה)

לכל $z\in C$: $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

2.1. הסתברות מותנה (Conditional Probability):

הגדרה - יהיו (Ω,P) מרחב הסתברות בדידה, ויהא B מאורע בעל הסתברות חיובית. פונ' ההסתברות המותנה ב-B היא הפונקציה

$$P(x|B)=\begin{cases}\frac{P(x)}{P(B)}, & x\in B\\ 0, & x\notin B\end{cases}$$

טענה - $(\Omega,P(\cdot|B))$ הוא מרחב הסתברות בדיד.

הוכחה - צ"ל: 1. $Im(P(\cdot|B))\subseteq[0,1]$

2. $\sum_{x\in\Omega}P(x|B)=\sum_{x\in B}P(x|B)+\sum_{x\notin B}P(x|B)^2=\sum_{x\in B}\frac{P(x)}{P(B)}+0=\frac{1}{P(B)}\cdot\underbrace{\sum_{x\in B}P(x)}_{=P(B)}=1$ ← מתכנס ממבחן ההשוואה ראשון לטור א"ש חיובי

הערות - 1. ההגדרה עוברת למאורעות: $P(A|B)=\sum_{x\in A}P(x|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

2. ניתן לחזור על ההתניה: $P(A|B,C)=P(A|B\cap C)$

דוגמא - 3 קלפים, א/א, א/ש, ש/ש.

← בחרתי קלף באקראי וצד באקראי. רואים אדום, מה הסיכוי שהצד השני אדום?

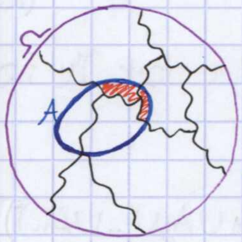
$P(\text{למטה א}\mid\text{למעלה א})=\frac{P(\text{למעלה א ולמטה א})}{P(\text{למעלה א})}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$ => ש/ש ש/א א/א

ש ש ש א א א

2.2. נוסחת ההסתברות השלמה (law of total probability)

טענה - תהיו B_i חלוקה של Ω. אז לכל $A\subseteq\Omega$ מתקיים: $P(A)=\sum P(A|B_i)\cdot P(B_i)$

הוכחה -



$$A=\dot\bigcup(A\cap B_i)$$

$$P(A)=\sum P(A\cap B_i)$$

$$=\sum P(A|B_i)\cdot P(B_i)$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)$$

טענה - יהיו $E_1,\dots,E_n$ מאורעות: $P(\bigcap_{i=1}^{n}E_i)=P(E_1)\cdot P(E_2|E_1)\cdot P(E_3|E_1,E_2)\cdot\ldots$

$$\ldots\cdot P(E_n|E_1,\dots,E_{n-1})$$

← מחלקים חפיסת קלפים לארבע ערימות שוות — מה הסיכוי שבכל ערימה יש אס?

אס עלה בערימה כלשהי - E_1

אס עלה ואס לב בערימות שונות - E_2

אס עלה, לב ויהלום בערימות שונות - E_3

כל האסים בערימות שונות - E_4.

$$P(E_4)=P(E_1\cap E_2\cap E_3\cap E_4)=P(E_1)\cdot P(E_2|E_1)\cdot P(E_3|E_1,E_2)\cdot P(E_4|E_1,E_2,E_3)=$$

$$=1\cdot\frac{39}{51}\cdot\frac{26}{50}\cdot\frac{13}{49}=0.105$$

2.3. נוסחת בייס. (Bayes' rule/theorem/law)

טענה -
$$P(B|A)=\frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)}$$

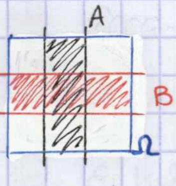
$$P(\text{woman})=0.5$$

$$P(W|\text{Long})=\frac{P(L|W)\cdot P(W)}{P(L)}\qquad P(L|W)=0.75\quad P(L|W^c)=0.15$$

$$=\frac{P(L|W)\cdot P(W)}{P(L|W)\cdot P(W)+(L|W^c)\cdot P(W^c)}$$

$$=\frac{0.75\cdot 0.5}{(0.75\cdot 0.5)+(0.15\cdot 0.5)}=\frac{0.75}{0.9}=\frac{5}{6}$$

הסתברות הרצאה - 6/3 - 1



2.4 אי תלות (Independence)

הגדרה - מאורעות A,B נקראים בלתי-תלויים אם: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

טענה - אם $P(B)=0$ אז המאורע B ב"ת בכל מאורע A.

$\leftarrow$ $P(A\cap B)\le P(B)=0$

$P(A\cap B)=0=P(A)=0=P(A)P(B)$

טענה - הטענות הבאות שקולות: (1) A,B ב"ת

(2) A^c,B ב"ת

(3) A,B^c ב"ת

(4) A^c,B^c ב"ת

הוכחה - $1\to 2$: $P(A^c\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$, כי $A\cap B$ ו- $A^c\cap B$ הן זרות.

$=P(B)-P(A)P(B)=P(B)(1-P(A))=$

$=P(B)P(A^c)$

טענה - נניח $0<P(A),P(B)<1$, אז הדברים הבאים שקולים: (1) $P(A|B)=P(A)$

(2) $P(A|B)=P(A|B^c)$

(3) A,B ב"ת

הגדרה - המאורעות $A_1,A_2,\dots,A_n$ נקראים <u>בלתי תלויים במשותף</u> אם לכל אוסף מאורעות $A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_k}$ - $P(\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j})=\prod_{j=1}^{k}P(A_{i_j})$.

טענה - מאורעות $A_1,\dots,A_n$ הם ב"ת במשותף אמ"מ לכל $\alpha\in\{0,1\}^n$ מתקיים:

$P(A_1^{\alpha_1}\cap A_2^{\alpha_2}\cap\dots\cap A_n^{\alpha_n})=\prod_{i=1}^{n}P(A_i^{\alpha_i})$ כאשר $A^0=A$ ו- $A^1=A^c$.

דוגמאות - נבחר בוקטורים (x_1,x_2,x_3) הבאים: $(0,0,0)$

נגדיר - A_i - $x_i=0$ $\Leftarrow$ $P(A_i)=\frac{1}{2}$ $\qquad (1,1,0)$

$P(A_2|A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$ $\qquad (0,1,1)$

$(1,0,1)$

$\Leftarrow$ המאורעות A_1,A_2,A_3 ב"ת בזוגות - אבל לא ב"ת במשותף.

תרגיל - עבור $m<n$ הגדירו n מאורעות כך שכל m ב"ת במשותף וכל $m+1$ תלויים במשותף. (אתגרי).

הערה - מאורעות זרים בעלי הסתברות חיובית תמיד תלויים $\leftarrow$

הסתברות הרצאה-6/3-2

הערה- יהיו A,B מאורעות כך ש- $0<P(A),P(B)<1$ ו- $A\cap B\neq\emptyset$ אז A ו- B תלויים. $P(A\cap B)=P(\emptyset)=0$, $P(A)P(B)>0$.

3. משתנים מקריים (Random Variables)

הגדרה- משתנה מקרי הוא פונקציה (מדידה) $X:\Omega\to\mathbb{R}$.

הערה- המאורעות $X^{-1}(a)=\{x\in\Omega \mid X(\omega)=a\}$, זרים בזוגות ואיחודם הוא Ω (כלומר הם מהווים חלוקה של Ω).

סימון- מסמנים את ההסתברות למאורע הנ"ל במגוון דרכים:

$$P(X=a)=P(X(\omega)=a)=P(\{\omega \mid X(\omega)=a\})=P(X^{-1}(a))=\dots$$

דוגמא: המ"מ המציין (characteristic R.V.) של מאורע $A\subseteq\Omega$ מוגדר כך: $X_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$, $P(X_A=1)=\sum_{\omega\in A}P(\omega)=P(A)$

הגדרה- יהא (Ω,P) מרחב הסתברות בדיד ו- $X:\Omega\to\mathbb{R}$ מ"מ.

הפונקציה $a\mapsto P(X=a)$ נקרא פונקציית ההתפלגות של X. (Distribution fun.)

דוגמא- יהא X מ"מ המקבל ערכים שלמים בקטע $[a,b]$ בהסתברויות שוות. אומרים ש-X מתפלג בהתפלגות אחידה ומסמנים: $X\sim U[a,b]$. (Uniform distribution)

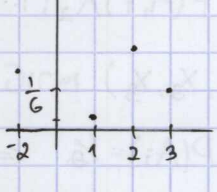
הערה- השם והסימון משמשים למשהו אחר במקרה הרציף.

3.1 התפלגות משותפת (Joint distribution)

← נתונים שני מ"מ $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ אפשר להגדיר מאורעות ע"י $X=a\wedge Y=b$ כלומר קב' ה-$\omega\in\Omega$ עבורם $X(\omega)=a\wedge Y(\omega)=b$ נקבל פונקציית התפלגות משותפת $(a,b)\mapsto P(X=a,Y=b)$.

	1	8	16 → X
1	1/4	·	·
2	·	·	·
3	·	·	·
⋮			
↓ Y			

$\Leftarrow$



הערה- מתקיים $P(X=a)=\sum_{b\in \mathrm{Im}(Y)}\overset{\text{כמו P רגיל}}{P_r}(X=a,Y=b)$

תרגיל- בכד יש כדור אדום וכדור כחול. בכל צעד מוציאים כדור באקראי ומחזירים אותו ועוד כדור מאותו צבע. הראו שמספר הכדורים האדומים מתפלג אחיד (לכל n).

הגדרה- אי תלות (של מ"מ) - המ"מ X,Y נקראים ב"ת אם $P(X=a,Y=b)=P(X=a)P(Y=b)$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

טענה- התנאים הבאים על מ"מ X,Y שקולים: (1) X,Y ב"ת

(2) ההתפלגות של $X|Y=b$ זהה להתפלגות של X

(3) כל זוג מאורעות $X=a$ ו- $Y=b$ הם ב"ת.

כאשר ההתפלגות $X|Y=b$ מוגדרת ע"י $a\mapsto P(X=a,Y=b)$.

הסתברות הרצאה - 1-12/3

← X,Y ב"ת אם: $P(X=a,Y=b)=P(X=a)P(Y=b)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$

טענה - אם X ו-Y ב"ת אז לכל $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)$ ו-Y ב"ת $\quad f(x):\Omega\to\mathbb{R}$

רעיון ההוכחה - כי ראינו ש- X,Y ב"ת אמ"מ $X|Y=y$ ההתפלגות זהה לכל y.

דוגמא - נבחר וקטורים:

(2,2,1)	(0,0,0)
(2,3,1)	(0,1,0)
(3,2,1)	(1,0,0)
(3,3,1)	(1,1,0)

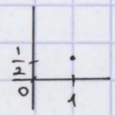
נגדיר X הערך בקוא׳ הראשונה.

Y הערך בקוא׳ השניה.

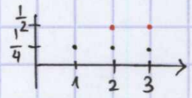
Z הערך בקוא׳ השלישית.

$X|Z=0$ ו- $Y|Z=0$ ב"ת.

X \ Y	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4



$X|Z=1$ ו- $Y|Z=1$ ב"ת.



אבל, X ו-Y תלויים.

3.2 סכום ומכפלה של מ"מ (Sum & product of R.V)

← ראינו שאם X מ"מ ו-f פונקציה ממשית

← בדומה אם X,Y מ"מ ו- $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ אז $f(X,Y)$ מ"מ

← בפרט, $X+Y$ הוא מ"מ, $X\cdot Y$ מ"מ.

← ניתן להכליל לכל מס׳ סופי של מ"מ.

תרגיל - הראו שאוסף המ"מ מעל Ω הוא מרחב וקטורי. ואם Ω סופית, אז מימדו $|\Omega|$.

3.3 תוחלת של מ"מ בדיד (Expectation of discrete R.V)

הגדרה - יהא X מ"מ בדיד אז התוחלת $E(X)=\sum_{\substack{a\\ p(a)>0}} p(X=a)\cdot a$

בתנאי שהטור מתכנס בהחלט.

הערה - $E(X)=\sum_{w} P(w)\cdot X(w)$

הסתברות הרצאה - 12/3 - 2

דוגמא - תוחלת הטלת קוביה.

← בסיכוי $1/6$ מתקבלת כ"א מהתוצאות הבאות — $1,2,\dots,6$.

לכן: $\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot i=\frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}=3.5$.

דוגמא - יהא I מ"מ מציין למאורע A.

$$I(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$$

← מה תוחלת של I? $E(I)=P(I=0)\cdot 0+P(I=1)\cdot 1=P(I=1)=$

$$=P(A)$$

דוגמא - X מ"מ עם התפלגות — $\forall n\in N,\ P(n)=\frac{6}{\pi^2 n^2}$

← $\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=\frac{6}{\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}=1$

← $E(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi^2 n^2}\cdot n=\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

התוחלת לא מוגדרת.

טענה - X מ"מ, $f:R\to R$

$$E(f(x))=\sum_a P(x=a)\cdot f(a)$$

← כנ"ל לכל $g:R^2\to R$.

$$E(g(X,Y))=\sum_{a,b}P(X=a,Y=b)g(a,b)$$

טענה - (1) יהא c קבוע - $E(C)=C$

(2) לכל קבוע a - $E(ax)=aE(x)$

(3) אם $X\geq 0$ (מ"מ חיובי) אז $E(x)\geq 0$

הוכחה (3): $E(x)=\sum_{\substack{a\\ p(a)>0}}\underbrace{p(x=a)}_{\geq 0}\cdot\underbrace{a}_{\geq 0}$

קיבלנו סכום של מס' אי שליליים ⇐ הוא אי שלילי.

← אם בנוסף $\sum p(x=a)\cdot a=0$ אז בכל מחובר $a=0$ או $P(x=a)=0$

$$P(x>0)=\sum_{a>0}P(x=a)=0$$

למה: לכל שני מ"מ: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

* התכנסות בימין ⇐ התכנסות בשמאל אך לא ההפך!

הוכחה - $E(x+y)=\sum_{a,b}p(x=a,y=b)(a+b)=$

$=\sum_{a,b}p(x=a,y=b)\cdot a+\sum_{a,b}p(x=a,y=b)\cdot b=\sum_a\left(\sum_b P(x=a,y=b)\cdot a\right)+\sum_b\left(\sum_a P(x=a,y=b)\cdot b\right)$

הסתברות שולית

$=\sum(p(x=a)\cdot a)+\sum(p(y=b)\cdot b)=E(x)+E(y)$

הסתברות הרצאה - דף - 1

טענה - לכל שני מ"מ X,Y $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

(התכנסות בצד ימין ⇐ התכנסות בשמאל) אבל לא להפך.

← מה הסיכוי לרצף של 0 או 1 באורך 7 (בהטלת 100 מטבעות - הוגנים)?

דוגמא - מהי התוחלת מס' הג'נטלמנים שמקבלים את מגבעתם מערמת הכובעים המבולבלת?

פתרון - נגדיר את המאורע: A:

הג'נטלמן ה-i קיבל את מגבעתו: A_i

מ"מ מציין ל-A_i: I_i

מס' האנשים שקיבלו מגבעתם X

← $X=\sum_{i=1}^{n} I_i$

כעת, $E(I_i)=P(A_i)=1/n$

⇐ $E(X)=E(\sum_{i=1}^{n} I_i)$

$=\sum_{i=1}^{n} E(I_i)=n\cdot\frac{1}{n}=1$

הגדרה - עבור מאורע A נסמן $E(X|A)$, (התוחלת של X בהינתן A), שהיא התוחלת של X במרחב ההסתברות $(\Omega, P(\cdot|A))$.

כלומר $E(X|A)=\sum_a P(X=a|A)\cdot a$

טענה - אם $\Omega=\cup A_i$ היא חלוקה של Ω אז: $E(X)=\sum_i E(X|A_i)P(A_i)$

הוכחה - $E(X)=\sum_a P(X=a)\cdot a=\sum_a\sum_i P(X=a|A_i)\cdot P(A_i)\cdot a \underset{\text{נוסחת ההסתברות השלמה}}{=}$

$=\sum_i P(A_i)\sum_a P(X=a|A_i)\cdot a=\sum_i P(A_i)\cdot E(X|A_i)$

סימון - עבור מ"מ X,Y נסמן ב-$X|Y_{(=y)}$ את המ"מ X בהינתן ערך של Y.

בפרט, התוחלת של המ"מ הנ"ל תלויה ב-ערך של Y.

טענה - (חוק התוחלת החוזרת), לכל מ"מ X,Y, $E(X)=E_Y(E_X(X|Y))$

הוכחה - מהטענה הקודמת - $E(X)=\sum_a P(X=a)\cdot a=\sum P(Y=b)\cdot E(X|Y=b)$

$=E_Y(E_X(X|Y))$

טענה - אם X,Y מ"מ ב"ת - $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$.

הוכחה - $E(XY)\underset{\text{טענה קודמת}}{=}E_X(E_Y(XY|X))=E_X(X\cdot E_Y(Y|X))$

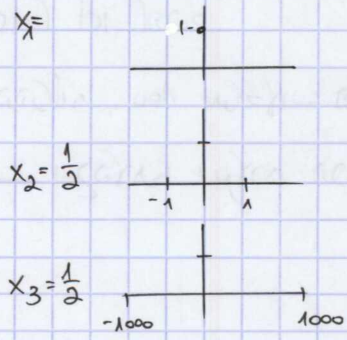
תוחלת של קבוע מ"מ

$=E_X(X\cdot E_Y(Y))=E(Y)\cdot E(X)$

הסתברות הרצאה - 13/3 - 2

3.4 שונות (Variance)

דוגמא -



$$E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)=0$$

$$E((X-E(X))^2)$$

הגדרה - עבור מ"מ X, השונות של X היא:

$$V(X)=Var(X)=VAR(X)=E((X-E(X))^2)$$

טענה - $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

הוכחה - $V(X)=E((X-E(X))^2)=E(X^2-2X\cdot E(X)+E(X)^2)=E(X^2)+E(-2XE(X))+E(E(X)^2)$

$$=E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+E(X)^2=E(X^2)-E(X^2)$$

דוגמא - מהי השונות של הטלת הקוביה?

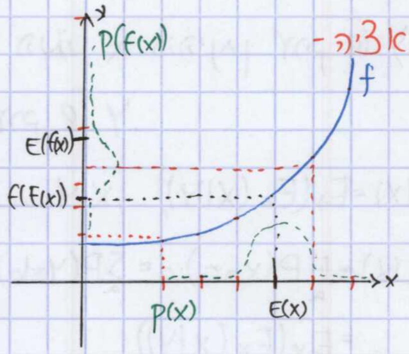
$$E(X^2)=\tfrac{1}{6}\cdot 1^2+\tfrac{1}{6}\cdot 2^2+\ldots+\tfrac{1}{6}\cdot 6^2=\frac{91}{6}\longrightarrow E(X)=3.5$$

$$V(X)=\frac{91}{6}-(3.5)^2=\frac{35}{12}$$

משפט - אי שוויון ינסן - הגירסה ההסתברותית. (Jensen inequality-Probabilistic setting).

← יהיו (Ω,P) מרחב הסתברות בדיד, X מ"מ בדיד ו-f פונקציה קמורה אזי: $f(E(X))\le E(f(X))$

הסבר/אינטואיציה -



הוכחה - (למקרה ש-$|Im(X)|<\infty$ סופי).

← f קמורה, כלומר לכל $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ולכל $0\le\lambda\le1$ ← $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

← מאינדוקציה: אזי לכל $0\le\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\le1$ כך ש- $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ ו- $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$

אזי $f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$

← $f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)=f(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i+\lambda_n x_n)=$

הסתברות הרצאה - 19/3 - 3

$$=f\left((1-\lambda_n)\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}\cdot x_i+\lambda_n x_n\right)\leq \qquad \leftarrow$$

$$=(1-\lambda_n)f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}\cdot x_i\right)+\lambda_n\cdot f(x_n)\leq$$

מאינדוקציה $\left(\text{כי } \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}=1\right)$

$$\leq(1-\lambda_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}f(x_n)+\lambda_n\cdot f(x_n)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot f(x_i)$$

$$E(f(x))=\sum_{\substack{a\\ p(a)>0}}P(x=a)\cdot f(a)\geq$$

$$\geq f\left(\sum P(x=a)\cdot a\right)$$

למקרה הכללי מוסיפים טיעון רציפות – ולוקחים גבול.

נראה במ"מ רציפים, יקח 3 שורות – ויתבסס על המקרה הסופי.

הסתברות הרצאה - 20/3 - 1

טענה - 1. $V(ax+b)=a^2V(x)$.

2. $E(x^2)\geq E(x)$ (ולכן $V(x)\geq 0$).

הערה - 1. אינווריאנטיות השונות להזזה תשמש אותנו בתרגיל הקודם.

2. ידענו ש- $V(x)\geq 0$ גם כן $\leftarrow$ $E(x^2)\geq E(x)$.

הוכחה - 1. $V(ax+b)=E\left(\left((ax+b)-E(ax+b)\right)^2\right)=E\left((ax+b-a\cdot E(x)-b)^2\right)$

$$=E\left((ax-a\cdot E(x))^2\right)=E\left(a^2(x-E(x))^2\right)=a^2E\left((x-E(x))^2\right)=a^2V(x)$$

2. מא"ש ינסן. (אם f קמורה אז: $E(f(x))\geq f(E(x))$).

תרגיל - 1. כרטיס הגרלה עולה 100 ש"ח, סיכוי הזכייה 1/100,000, פרס 8,000,000

הראו שתוחלת הרכוש יורדת והשונות עולה.

2. ביטוח עולה 100 ש"ח, סיכוי שריפה 1/100,000, פיצוי 8,000,000

הראו שתוחלת הרכוש יורדת והשונות יורדת. (הבית שווה $8\cdot10^6$).

הוכחה - 1. נסמן $x=R'-R$, $V(R')=V(R'-R)$

$E(R)$ $E(R')$

R $R-100+\frac{1}{100{,}000}\cdot 8{,}000{,}000=$, $V(x)=E(x^2)-E(x)^2=\frac{1}{100{,}000}\cdot(8{,}000{,}000)^2+\frac{99{,}999}{100{,}000}\cdot 0^2-(-20)^2$

רכוש לפני הגרלה. $=R-100+80=R-20$ $=640{,}000{,}000-400>0$

2.

בלי ביטוח	עם ביטוח
$E(R)=\frac{99{,}999}{100{,}000}\cdot R+10^{-5}(R-8\cdot10^6)=R-80$ תוחלת	$R-100$
$V=\frac{1}{10^5}(-8\cdot10^6)^2+0-(-80)^2$ שונות $640{,}000{,}000-6400>0$	0

הסתברות – הרצאה – 2/4 – 1

3.6 התפלגויות בדידות (Discrete distributions)

תזכורת - יהא X מ"מ בדיד.

הפונקציה $a \mapsto p(X=a)$ נקראת פונקציית ההתפלגות של X.

3.6.1 התפלגות אחידה (Uniform Distribution)

הגדרה - מ"מ מקרי X מתפלג בהתפלגות אחידה עם הפרמטרים a,b אם $P(X=k)=\begin{cases}\frac{1}{b-a+1}, & a\le k\le b \\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$

מסמנים $X\sim U[a,b]$.

טענה $X\sim U[a,b]$ ⇐

$$E(X)=\sum_{x=a}^{b}\frac{1}{b-a+1}\cdot x=$$

$$=\frac{1}{b-a+1}\cdot\sum_{x=a}^{b}x=\frac{1}{b-a+1}\cdot\frac{a+b}{1}\cdot\frac{b-a+1}{2}=\frac{a+b}{2}$$

⇐ $V(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

3.6.2 התפלגות ברנולי והתפלגות בינומית (Bernoulli distribution and Binomial distribution)

הגדרה - יהא $0<p<1$, נסמן $q=1-p$.

התפלגות - $P(X=a)=\begin{cases}p, & 1\\ q, & 0\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$

מסמנים ש- $X\sim b(p)$.

⇐ טענה $X\sim b(p)$ ⇐ $E(X)=p\cdot 1+q\cdot 0=p$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=p\cdot 1^2+q\cdot 0^2-p^2=p-p^2=pq$$

⇐ "ניסוי ברנולי", "הצלחה", "כשלון".

מבצעים n ניסויי ברנולי ב"ת, כאשר הסג' ההצלחה היא p בכל ניסוי.

מה הסיכוי ש-k ניסויים הצליחו?

⇐ נסמן ב-X את מס' ההצלחות: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

הגדרה - מ"מ המתפלג כך (נקרא מ"מ מקרי בינומי (עם פרמטרים n,p).

מסמנים $X\sim Bin(n,p)$.

⇐ $X\sim Bin(n,p)$ הוכחה $E(X)=np$

שימור החיבור (מאדיטיביות – הוכחה) $V(X)=npq$ (סכום שונויות של מ"מ ב"ת).

טענה - $X_1\sim Bin(n_1,p)$, $X_2\sim Bin(n_2,p)$ ב"ת ⇐ $X_1+X_2\sim Bin(n_1+n_2,p)$

הסתברות — הרצאה - מ2-2

הוכחה - מהבניה של ההתפלגות הבינומית.

דוגמא - 2 שחקנים מטילים n מטבעות, הראשון לוקח את כל ה"עץ" והשני את כל ה"פלי". כ"א מטיל שוב את כל המטבעות ושומר אצלו את אלו שיצאו בצד שלו.

1. מה תוחלת הרווח של השחקן הראשון?
2. מה מקדם המתאם בין הרווח של הראשון והרווח של השני?

פתרון - 1. מס' המטבעות שמגיעים לשחקן הראשון מתפלג $Bin(n,\frac{1}{4})$.
לכן תוחלת הרווח של הראשון $n/4$.
2. מקדם המתאם יהיה שלילי.

דוגמא - שיכור ניצב בנק' 0 על ציר המס'. בכל צעד זמן הוא פוסע ימינה או שמאלה. בהסת' $\frac{1}{2}$ ובאופן ב"ת בצעדים הקודמים.

⇐ המקום של השיכור בזמן n הוא: $X=2X_0-n$ כאשר X_0-מס' הצעדים שצעד ימינה.

⇐ מה התפלגות מיקום השיכור? $X_0\sim Bin(n,\frac{1}{2})$

$$E(X_0)=n/2$$

$$E(X)=2\cdot\frac{n}{2}-n=0$$

$$V(X)=V(2X_0-n)=V(2X_0)=4V(X_0)=n$$

$$std(X)=\sqrt{n}$$

3.6.3 התפלגות פואסון (Piosson distribution)

הגדרה - מ"מ X עוקב אחרי התפלגות פואסון או "מתפלג לפי פואסון" אם:
$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
מסמנים - $X\sim Pois(\lambda)$.

תזכורת - לכל $z\in\mathbb{C}$, $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

נבדוק שהתפלגות בינומית אכן התפלגות- $X\sim Bin(n,p)$

$$\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=1$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=(p+(1-p))^n=1^n=1$$

⇐ נבדוק שהפונקציה היא אכן התפלגות: $X\sim Pois(\lambda)$

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$$

הסתברות- הרצאה- שבוע-3

$$E(X)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X=n)\cdot n=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\cdot n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\cdot n=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}=\{m=n-1\}$$

$$=\lambda\sum_{m}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^m}{m!}=\lambda$$

← בדומה: $V(X)=\lambda$

טענה- לכל k קבוע: $\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\xrightarrow[n\to\infty]{}=1$

← נגדיר סדרת מ"מ: $X_n\sim Bin(n,\frac{\lambda}{n})$.

$$\lim_{n\to\infty}P(X_n=k)=\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\lambda^k}{n^k}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^k(n-k)!}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n\cdot\frac{n-k}{n}}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}1\cdot(e^{-\lambda})^1=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=P(Z=k)$$

עבור $Z\sim Pois(\lambda)$

← יהיו X,Y מ"מ ב"ת $X\sim Pois(\lambda_0)$

$Y\sim Pois(\lambda_1)$

$$Pr(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}Pr(X=i)\cdot Pr(Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}e^{-\lambda_0}\cdot\frac{\lambda_0^i}{i!}\cdot e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_1^{k-i}}{(k-i)!}=e^{-(\lambda_0+\lambda_1)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_0^i\lambda_1^{k-i}}{i!(k-i)!}=$$

$$=e^{-(\lambda_0+\lambda_1)}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\sum\frac{k!}{i!(k-i)!}\cdot\lambda_0^i\cdot\lambda_1^{k-i}=$$

$$=e^{-(\lambda_0+\lambda_1)}\cdot\frac{1}{k!}(\lambda_0+\lambda_1)^k=P(Z=k)$$

עבור $Z\sim Pois(\lambda_0+\lambda_1)$

← מסקנה: $X+Y\sim Pois(\lambda_0+\lambda_1)$

הסתברות - הרצאה - 26/3 - 1

מייל נוסף של המרצה - lobber@gmail.com

* במבחן תופיע השאלה להגדיר משתנה מקרי.

← תזכורת: $E(X)=E_Y(E_X(X|Y))$

טענה - $V(X)=V_Y(E_X(X|Y))+E_Y(V_X(X|Y))$

הוכחה - $V_Y(E_X(X|Y))=E_Y(E_X(X|Y)^2)-[E_Y(E_X(X|Y))]^2=$

$=E_Y(E_X(X|Y)^2)-(E(X))^2$ - תוחלת חוזרת

$$E_Y(V_X(X|Y))=E_Y(E_X(X^2|Y)-(E_X(X|Y))^2)=$$

$$=E_Y(E_X(X^2|Y))-E_Y(E_X(X|Y)^2)=E(X^2)-E_Y(E_X(X|Y)^2)$$

דוגמא - אם X ו-Y ב"ת

$$V(X)=V(E(X|Y))+E(V(X|Y))=V(E(X))+E(V(X|Y))$$

$$=0+E(V(X|Y))=E(V(X))=V(X)$$

אם $X=f(Y)$ אז

$$V(X)=V(E(X|Y))+E(V(X|Y))=V(E(X|Y))+0=V(f(Y))$$

3.5 שונות משותפת (Covarianco)

הגדרה - השונות המשותפת של מ"מ X,Y היא:

$$Cov(X|Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$$

הגדרה - נאמר שמ"מ X,Y הם בלתי מתואמים (uncorrelated), אם: $cov(X,Y)=0$.

הערה - אם X ו-Y ב"ת אז הם בלתי מתואמים. ההפך אינו נכון!

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$$

דוגמא - X - קוא' ראשונה

Y - קוא' שנייה

$(-1,0)$

$(1,0)$

$(0,1)$ $\quad E(X)=E(Y)=0$ $\quad P[X=0]=\frac{1}{2}$

$(0,-1)$ $\quad E(XY)=E(0)=0$ $\quad P[X=0|Y=0]=0$

$cov(X,Y)=0$

טענה - cov היא תבנית בילינארית סימטרית על מרחב המ"מ.

הערה - cov היא מכפלה פנימית מעל מרחב המ"מ מודולו הזזה.

הגדרה - X,Y מ"מ לא קבועים. מקדם המתאם של X,Y (Correlation Coefficient) הוא:

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{Cov(X,Y)}{SD(X)SD(Y)}$$