לינארית 2 - מטלה 3 - העתקות לינאריות

תאריך הגשה: $9-11.4.2018$ כל אחד בקבוצת תרגול שלו.

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים:

1. **מספר תרגיל**
2. **שם מלא**
3. **ת.ז**
4. **מספר קבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים.**

תרגיל 1. עבור הסעיפים הבאים מצא את המטריצה המייצגת, וודא שתשובתך נכונה בעזרת בדיקת השיווין

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} [v]_{B_1}$$

עבור $v \in V$ המקיים

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

1. תהי $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי

$$T\left(a+bx+cx^2\right) = \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \end{pmatrix}$$

מצאו את $[T]_{B_2}^{B_1}$ עבור

$$B_1 = \left\{1, 1+x, 1+x+x^2\right\}$$

ו-

$$B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

פתרון.

$$[T]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(1)]_{B_2} & [T(1+x)]_{B_2} & \left[T\left(1+x+x^2\right)\right]_{B_2} \\ | & | & | \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{B_2} & \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B_2} & \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_{B_2} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

נבדוק את התשובה עבור $v=3+2x+x^2$ אז

$$[v]_{B_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ו

$$[T(v)]_{B_2}=\left[\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right]_{B_2}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

ואכן מתקיים

$$[T(v)]_{B_2}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=[T]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1}$$

2. תהי $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת על ידי

$$T\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=a+(b+d)x+(c+a)x^2$$

מצאו את $[T]_{B_2}^{B_1}$ עבור

$$B_1=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

ו-

$$B_2=\left\{1,1+x,1+x+x^2\right\}$$

פתרון.

$$\begin{aligned}[T]_{B_2}^{B_1}&=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\ \left[T\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)\right]_{B_2}&\left[T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\right]_{B_2}&\left[T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)\right]_{B_2}&\left[T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)\right]_{B_2}\\ |&|&|&\end{pmatrix}=\\
&=\begin{pmatrix}|&|&|&\\ \left[1+2x+2x^2\right]_{B_2}&\left[1+x+x^2\right]_{B_2}&\left[1-x+x^2\right]_{B_2}&\left[x^2\right]_{B_2}\\ |&|&|&\end{pmatrix}=\\
&=\begin{pmatrix}-1&0&2&0\\0&0&-2&-1\\2&1&1&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

נבדוק את התשובה עבור $v=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ אז

$$[v]_{B_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ו

$$[T(v)]_{B_2}=\left[3+2x+5x^2\right]_{B_2}=\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}$$

ואכן מתקיים

$$[T(v)]_{B_2}=\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&2&0\\0&0&-2&-1\\2&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=[T]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1}$$

תרגיל 2. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית הפיכה ו-B_1,B_2 בסיסים ל-V הוכח שמתקיים

$$\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1}=\left([T]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$$

. רמז :

$$[T\circ S]_{B_1}^{B_3}=[T]_{B_1}^{B_2}[S]_{B_2}^{B_3}$$

פתרון.

נשים לב שמתקיים

$$\left[T\circ T^{-1}\right]_{B_1}^{B_1}=[T]_{B_1}^{B_2}\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1}$$

ומצד שני

$$\left[T\circ T^{-1}\right]_{B_1}^{B_1}=[Id]_{B_1}^{B_1}=I$$

לכן בסהכ נקבל ש-

$$[T]_{B_1}^{B_2}\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1}=I$$

לכן

$$\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1}=\left([T]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$$

תרגיל 3. היו $S,T:V\to W$ העתקות לינאריות, ו-$\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס ל-V. נתון ש-$\forall i:\ T(v_i)=S(v_i)$ הוכח ש-$T=S$.

פתרון.

יהי $v\in V$ ויהיו $\{v_1,\ldots,v_n\}$בסיס ל-V קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ סקלרים כך ש-

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$

לכן

$$\begin{aligned}T(v)&=T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)&=\\&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)&=\\&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i S(v_i)&=S(v)\end{aligned}$$

תרגיל 4. תהי $T:\mathbb{F}^{n\times m}\to\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדרת על ידי $T(A)=A^T$ הוכיחו ש-

1. T העתקה לינארית.

פתרון.

יהי $A,B\in\mathbb{F}^{n\times m}$ ו- $\alpha\in\mathbb{F}$ אז

$$T(\alpha A+B)=(\alpha A+B)^T=\alpha A^T+B^T=\alpha T(A)+T(B)$$

2. T על וחח"ע .

פתרון.

- על: תהי $B \in W = \mathbb{F}^{m\times n}$ אז ניקח
$$A = B^T \in V = \mathbb{F}^{n\times m}$$
ונקבל ש-
$$T(A) = T\left(B^T\right) = \left(B^T\right)^T = B$$
- חח"ע: היו $A_1, A_2 \in V = \mathbb{F}^{n\times m}$ כך ש-$T(A_1) = T(A_2)$נוכיח ש-$A_1 = A_2$
$$T(A_1) = T(A_2)$$
$$A_1^T = A_2^T$$
$$A_1 = A_2$$

3. היות ו-Tחח"ע ועל היא הפיכה, מצא את T^{-1}.

פתרון.

- כזכור
$$\left(A^T\right)^T = A$$
לכן אם נגדיר $S : \mathbb{F}^{m\times n} \to: \mathbb{F}^{n\times m}$ נקבל ש-
$$\begin{cases} \forall A \in \mathbb{F}^{n\times m} & S(T(A)) = \left(A^T\right)^T = A \\ \\ \forall B \in \mathbb{F}^{m\times n}: & S(T(B)) = \left(B^T\right)^T = B \end{cases}$$

תרגיל 5. תהי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ 2x-2z \end{pmatrix}$ מצא את בסיס לגרעין ולתמונה של T בעזרת מטריצה מייצגת.

פתרון. נמצא את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי
$$[T]_S^S = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_S & \left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_S & \left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_S \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- הגרעין:
$$[Ker(T)]_S = N(A) = \left\{\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$$
לכן
$$Ker(T) = \left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = Span\left\{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right\}$$

- תמונה:
$$[Im(T)]_S = C(A) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} s+t \\ t \\ 2s \end{pmatrix}\right\}$$
לכן
$$Im(T) = \left\{(s+t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל 6. (שאלת בונוס- מי שחושב שירדו לו נקודות על שאלות קודמות מוזמן להשלים נקודות כאן) נגדיר

$$P\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)=\left\{T\in Hom\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)\mid\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in Ker\left(T\right)\right\}$$

הוכח ש$P\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)$ הוא תת מרחב של $Hom\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)$

פתרון.
היו $T,S\in P\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$ אז צריך להוכיח ש-$\alpha T+S\in P\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)$ כדי להוכיח זאת צריך להראות ש- $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in Ker\left(\alpha T+S\right)$

$$\left(\alpha T+S\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+S\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in Ker\left(\alpha T+S\right)$$

כלומר

$$\alpha T+S\in P\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)$$

מכאן $P\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)$ הוא תת מרחב של $Hom\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)$

בהצלחה!!