תרגול 2 אינפי 1 למדמ"ח

אינפיניטיסימלים וחלק סטנדרטי

הגדרה 2.1 מספר ϵ נקרא אינפיניטיסימל חיובי, אם הוא גדול מ0 אבל קטן יותר מכל מספר ממשי חיובי.

מספר ϵ' נקרא אינפיניטיסימל שלילי, אם הוא קטן מ0 אבל גדול יותר מכל מספר ממשי שלילי.

הגדרה 2.2 מספר H נקרא אינסופי חיובי, אם הוא גדול יותר מכל מספר ממשי.

מספר H' נקרא אינסופי שלילי, אם הוא קטן יותר מכל מספר ממשי.

דרך התרגילים נזכיר תכונות של פעולות על מספרים היפר ממשיים.

בכל התרגול ϵ, δ אינפיניטיסימלים חיוביים ו H, K אינסופיים חיוביים.

תרגיל 2.3 הוכיחו כי $-H$ הוא מספר אינסופי שלילי.
תשובה: יהי a מספר ממשי, צריך להראות ש $-H \leq a$ אבל גם $-a$ ממשי ו$-a \leq H$ ומכאן מתקבל $-H \leq a$

תרגיל 2.4 הוכיחו כי $\frac{1}{\epsilon}$ הוא מספר אינסופי.
תשובה: יהי a מספר ממשי, צריך להראות כי $a < \frac{1}{\epsilon}$. אם $a \leq 0$ האי שוויון נובע מכך ש $0 < \epsilon$ ולכן $a \leq 0 < \frac{1}{\epsilon}$ אם $a > 0$ אז האי שוויון נובע מכך ש $\epsilon < \frac{1}{a}$

תרגיל 2.5 הוכיחו כי סכום אינפיניטיסימליים (חיוביים או שליליים) הוא אינפיניטיסמל.

תשובה: נניח ש x, y הם האינפיניטסימליים שלנו, צריך להראות שלכל a ממשי חיובי $-a < x + y < a$. וזה נובע מכך ש

$$-\frac{a}{2} < x, y < \frac{a}{2}$$

תרגיל 2.6 הוכיחו כי סכום מספרים סופי הוא מספר סופי.
תשובה: יהיו a ו b סופיים, מה שבעצם צריך להראות, זה ש $a + b$ הוא לא אינסופי, כלומר שיש מספר ממשי גדול ממנו ומספר ממשי קטן ממנו. היות ש a ו b סופיים, יש ממשיים גדולים וקטנים מהם

$$y_1 < a < x_1$$

$$y_2 < b < x_2$$

ולכן

$$y_1 + y_2 < a + b < x_1 + x_2$$

כנדרש

תרגיל 2.7 הוכיחו כי H גדול מכל מספר סופי (גם לא ממשי).

תשובה: נניח b הוא מספר סופי צריך להראות ש $b < H$, היות שהוא לא אינסופי, יש מספר ממשי גדול ממנו, נניח x. היות ש x ממשי $x < H$ ולכן

$$b < x < H$$

כנדרש.

תרגיל 2.8 יהי b מספר סופי. הוכיחו כי $H + b$ הוא מספר אינסופי חיובי.

תשובה: יהי a מספר ממשי, צריך להוכיח ש $a < H + b$ כלומר צריך להוכיח ש $a - b < H$. וזה נכון כי $a - b$ מספר סופי

תרגיל 2.9 הראו כי חיבור מספרים אינסופיים יכול לצאת אינפיניטיסימל, מספר סופי שאינו אינפיניטיסימל, או מספר אינסופי.

תשובה: $H + H$, $H + (-H)$, $H + (-H + 1)$

תרגיל 2.10 הראו כי חילוק אינפיניטיסימליים יכול לצאת מספר אינסופי, סופי שאינו אינפיניטיסימל, או אינפיניטיסימל.

תשובה: $\frac{\epsilon}{\epsilon}, \frac{\epsilon^2}{\epsilon}, \frac{\epsilon}{\epsilon^2}$

תרגיל 2.11 קבעו האם המספרים הבאים הם אינפיניטיסימלים, סופיים אך לא אינפיניטיסימלים או אינסופיים.

1. $\frac{\epsilon}{H}$
תשובה: ϵ הוא אינפיניטיסימל ו $\frac{1}{H}$ הוא אינפיניטיסימל ולכן מכפלתם אינפיניטיסימל.

2. $H^2 - H$
תשובה: נשים לב ש $H^2 - H = H(H-1)$ ולכן זה מספר אינסופי בתור מכפלה של אינסופיים חיוביים

3. $\frac{\epsilon+\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}+1}$
תשובה: נשים לב ש

$$\frac{\epsilon+\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}+1} = \frac{\sqrt{\epsilon}(\sqrt{\epsilon}+1)}{\sqrt{\epsilon}+1} = \sqrt{\epsilon}$$

וזה אינפיניטיסימל.

4. $\frac{1}{3+\epsilon} - \frac{1}{3}$
תשובה: נחשב

$$\frac{1}{3+\epsilon} - \frac{1}{3} = \frac{3-3-\epsilon}{\epsilon(3+\epsilon)} = -\frac{1}{3+\epsilon}$$

וזה סופי שאינו אינפיניטיסימל.

5. $\frac{2H+1}{3H+2}$
תשובה: נחשב

$$\frac{2H+1}{3H+2} = \frac{2+\frac{1}{H}}{3+\frac{2}{H}}$$

נזכור ש $\frac{1}{H}$ הוא אינפיניטיסימל ולכן מתקבל מספר סופי חלקי מספר סופי (שאינם אינפיניטיסימלים) ולכן התוצאה היא מספר סופי שאינו אינפיניטיסימל

6. $\frac{H^4+5H+6}{H^2+7}$
תשובה: נחשב

$$\frac{H^4+5H+6}{H^2+7} = \frac{H^2+\frac{5}{H}+\frac{6}{H^2}}{1+\frac{7}{H^2}}$$

מספר אינסופי חלקי מספר סופי שאינו אינפיניטיסימל = מספר אינסופי.

7. $H(\sqrt{H+2}-\sqrt{H})$
תשובה: נשתמש בטריק חשוב שנקרא "כפל בצמוד"

$$\sqrt{H+2}-\sqrt{H} = \frac{(\sqrt{H+2}-\sqrt{H})(\sqrt{H+2}+\sqrt{H})}{\sqrt{H+2}+\sqrt{H}} = \frac{H+2-H}{\sqrt{H+2}+\sqrt{H}} = \frac{2}{\sqrt{H+2}+\sqrt{H}}$$

לכן החלק הזה בפני עצמו הוא אינפיניטיסימל. עכשיו

$$\frac{2H}{\sqrt{H+2}+\sqrt{H}} = \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{1+\frac{2}{H}}+1}$$

לכן בסך הכל זה מספר אינסופי.

8. $\frac{1}{\epsilon}(1-\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}})$
תשובה: נחשב:

$$\frac{1}{\epsilon}(1-\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}}) = \frac{1}{\epsilon}(\frac{\sqrt{1+\epsilon}-1}{\sqrt{1+\epsilon}})$$

שוב נבצע כפל בצמוד

$$\frac{1}{\epsilon}(\frac{\sqrt{1+\epsilon}-1}{\sqrt{1+\epsilon}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\epsilon}}{1+\sqrt{1+\epsilon}}) = \frac{1}{\epsilon}\frac{1+\epsilon-1}{\sqrt{1+\epsilon}(1+\sqrt{1+\epsilon})} = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}(1+\sqrt{1+\epsilon})}$$

לכן בסך הכל זה מספר סופי.

9. $\frac{H+K}{HK}$
תשובה: נחשב:

$$\frac{H+K}{HK} = \frac{1}{K}+\frac{1}{H}$$

כלומר זה אינפיניטיסימל.

10. $\frac{5+\epsilon}{7+\delta} - \frac{5}{7}$
תשובה: נחשב:

$$\frac{5+\epsilon}{7+\delta} - \frac{5}{7} = \frac{35+7\epsilon-35-5\delta}{49+7\delta} = \frac{7\epsilon-5\delta}{49+7\delta}$$

כלומר זה אינפיניטיסימל.

תרגיל 2.12 בכל אחד מהזוגות הבאים קבעו איזה מספר יותר גדול

1. ϵ, ϵ^2
תשובה: היות ש $\epsilon < 1$ אפשר לכפול שני אגפים ב ϵ ולקבל $\epsilon^2 < \epsilon$

2. $\epsilon, \sqrt{\epsilon}$
תשובה: בדומה היות ש $\sqrt{\epsilon} < 1$ נקבל ש $\epsilon < \sqrt{\epsilon}$

3. H, H^2
תשובה: בדומה היות ש $1 < H$ נקבל ש $H < H^2$

4. $100\epsilon^2 + 4\epsilon, 5\epsilon$
תשובה: היות ש $\epsilon < \frac{1}{100}$ נקבל ש $100\epsilon^2 < \epsilon$ ולכן $100\epsilon^2 + 4\epsilon < 5\epsilon$

תרגיל 2.13 נניח ש x הוא מספר היפרממשי חיובי. האם המספר $x + \frac{1}{x}$ יכול להיות אינפיניטיסימל? סופי לא אינפיניטיסימל? אינסופי?
תשובה: קל לראות שהוא יכול להיות סופי ($x = 1$) ואינסופי ($x = H$) נוכיח שהוא לא יכול להיות אינפיניטיסימל. היות שגם x וגם $\frac{1}{x}$ חיוביים, אם סכומם אינפיניטיסימל אז כל אחד מהם אינפיניטיסימל. כלומר x אינפיניטיסימל, אבל אז $\frac{1}{x}$ אינסופי, בסתירה.

תרגיל 2.14 עבור אילו ערכי a, b **ממשיים** המספר

$$\frac{3\epsilon^2 - \epsilon + a}{4\epsilon^2 + 2\epsilon + b}$$

הוא אינפיניטיסימל? סופי לא אינפיניטיסימל? אינסופי?
תשובה: מה שמשפיע על החילוק זה מאיזה סוג המספרים במונה ובמכנה. נשים לב שהמונה והמכנה לא יכולים להיות אינסופיים (כי הם ממשי ועוד אינפיניטיסימל). כמו כן המכנה לא יכול להיות 0. עכשיו נחלק לאפשרויות:

- מונה אינפיניטיסימל, מכנה מספר סופי: החילוק הוא אינפיניטיסימל. מקרה זה קורה כש $a = 0$ ו $b \neq 0$.

- מונה ומכנה מספר סופי: החילוק הוא מספר סופי. זה קורה כש $a, b \neq 0$.

- מונה סופי, מכנה אינפיניטיסימל: החילוק הוא מספר אינסופי. זה קורה כש $a \neq 0, b = 0$

- מונה ומכנה אינפיניטיסימל. זה המקרה הלא טריוויאלי היחיד וזה כאשר $a = b = 0$ ואז:

$$\frac{3\epsilon^2 - \epsilon}{4\epsilon^2 + 2\epsilon} = \frac{3 - \frac{1}{\epsilon}}{4 + \frac{2}{\epsilon}}$$

במקרה מתקבל מספר סופי (שאינו אינפיניטיסימל).
לסיכום:

- אינפיניטיסימל: $a = 0, b \neq 0$
- מספר סופי שאינו אינפיניטיסימל: $a = b = 0$ או $a \neq 0, \quad b \neq 0$
- מספר אינסופי: $a \neq 0, b = 0$

תרגיל 2.15 הוכיחו כי $|\sin H| \leq 1$.
תשובה: היות ש $-1 \leq \sin x \leq 1$ עבור כל x ממשי, אז לפי עקרון ההעברה מתקיים ש

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

עבור כל x היפר ממשי. בפרט

$$-1 \leq \sin H \leq 1$$

ולכן

$$|\sin H| \leq 1$$

תרגיל 2.16 יהיו a, b מספרים סופיים. הוכיחו כי אם $a - a'$ ו $b - b'$ הם אינפיניטיסימליים אז $ab - a'b'$ גם אינפיניטיסימל.

הערה 2.17 בהמשך הקורס, במקום לומר $a - a'$ הוא אינפיניטיסימל, נסמן $a \approx a'$
תשובה: ידוע ש $a - a'$ ו $b - b'$ הם אינפיניטיסימלים. נשים לב ש

$$ab - a'b' = ab - ab' + ab' - a'b' = a(b - b') + b'(a - a')$$

היות ש a, bסופיים ברור ש $a(b - b') + b'(a - a')$ אינפיניטיסימל.

תרגיל 2.18 נסמן $a = b = H$ ו $a' = b' = H + \frac{1}{H}$ הראו ש $ab - a'b'$ אינו אינפיניטיסימל.
תשובה: נחשב ונבדוק

$$ab = H^2$$

$$a'b' = H^2 + 2 + \frac{1}{H^2}$$

ולכן

$$ab - a'b' = 2 + \frac{1}{H^2}$$

שזה לא אינפיניטיסימל.

הגדרה 2.19 יהי b מספר סופי, החלק הסטנדרטי של b הוא המספר הממשי (היחיד) שקרוב ל b עד כדי אינפיניטיסימל.

תרגיל 2.20 מצאו את החלק הסטנדרטי של המספרים הבאים:

1. $\frac{2H+4}{3H-6}$
תשובה: היות ש

$$\frac{2H+4}{3H-6}=\frac{2+\frac{4}{H}}{3-\frac{6}{H}}$$

נקבל ש

$$\mathrm{st}(\frac{2+\frac{4}{H}}{3-\frac{6}{H}})=\frac{\mathrm{st}(2+\frac{4}{H})}{\mathrm{st}(3-\frac{6}{H})}=\frac{2}{3}$$

2. $\frac{4}{3H-6}$
תשובה: זה מספר אינפיניטיסימלי ולכן החלק הסטנדרטי שלו הוא 0

3. $\frac{2H+4}{3}$
תשובה: זה מספר אינסופי ולכן **אין לו** חלק סטנדרטי.

4. $\frac{(x+\epsilon)(y+\epsilon)-xy}{\epsilon}$ כאשר x,y ממשיים
תשובה: נחשב

$$\frac{(x+\epsilon)(y+\epsilon)-xy}{\epsilon}=\frac{xy+\epsilon y+\epsilon x+\epsilon^2-xy}{\epsilon}=x+y+\epsilon$$

ולכן החלק הסטנדרטי הוא $x+y$.

5. $\frac{b^2-25}{b-5}$ כאשר $\mathrm{st}(b)=5$ אבל $b\neq 5$.
תשובה: קל לראות ש

$$\frac{b^2-25}{b-5}=b+5$$

ולכן החלק הסטנדרטי הוא 10.

6. $2H(\sqrt{1+\frac{1}{H}}-1)$
תשובה: נבצע כפל בצמוד ונקבל

$$2H(\sqrt{1+\frac{1}{H}}-1)\frac{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}=2H\frac{1+\frac{1}{H}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}$$

עכשיו

$$\mathrm{st}\,\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}=\frac{\mathrm{st}\,2}{\mathrm{st}\,\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}=\frac{\mathrm{st}\,2}{\sqrt{1+\mathrm{st}\,\frac{1}{H}}+1}=\frac{2}{2}=1$$