הרצאה 4

משפט: TFAE = הבאים שקולים: (מט' ריבועית A)

(i) A הפיכה

(ii) $CF(A) = I$ (צורה קנונית)

(iii) לכל $\underline{b}$ יש פתרון יחיד למע' $A\underline{x} = \underline{b}$

(iv) אין פתרון לא טריוויאלי למע' ההומ' $A\underline{x} = \underline{0}$

(v) בכל מט' שק' ל-A, אין שורת אפסים ואין עמ' אפסים

(iv) ← (v):

אם ל- $A\underline{x} = \underline{0}$ אין פתרון לא טריוויאלי, הוכחנו כי אין ב-B שורת אפסים (לכל B שק' ל-A):

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} * & 0 & * \\ & \vdots & \\ * & 0 & * \end{bmatrix}\begin{array}{c}\\ j\\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

נניח כי B שק' ל-A, ונניח בשלילה כי ב-B יש שורת אפסים.

נתון ש- $CF(A) = CF(B)$.

$$B = \begin{bmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0 \\ & * & \end{bmatrix}$$

בצורה הקנונית:

$$CF(B) = \begin{bmatrix} & * & \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

נוכל לכתוב את המקרים הבאים:

א) ב- $CF(B)$ יש משתנים חופשיים

$$CF(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * & & \\ 0 & 1 & 0 & * & & \\ & 0 & 1 & * & & \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

יהי x_j המשתנה החופשי הקטן ביותר (j הראשון)

נסמן את:

$$C_j(CF(B)) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{j-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

נראה כי לבנות פתרון לא טריוויאלי למע' ההומ':

$$CF(B) \cdot \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_{j-1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j \underset{\substack{\text{לפי כפל} \\ \text{מט' בוקטור}}}{=} -\alpha_1 \cdot C_1 - \cdots - \alpha_{j-1} \cdot C_{j-1} + 1 \cdot C_j =$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\alpha_{j-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{j-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

פתרון לא טריוויאלי, בסתירה להנחה.

ג) - ב- $CF(B)$ <u>אין משתנים חופשיים</u>

כלומר, בכל עמודה יש איבר מוביל. המט' ריבועית

לכן יש n איברים מובילים. כולם בשורות שונות

כן מצא.

מכיוון שיש לנו בדיוק n שורות, פירוש שבכל שורה יש איבר מוביל ובפרט אין שורת אפסים ב- $CF(B)$,

בסתירה להנחה.

<u>הערה:</u> ראינו כי: A הפיכה $\Longleftrightarrow$ לכל $\underline{b}$ יש פתרון <u>יחיד</u> $A\underline{x}=\underline{b}$

<u>מתקיים:</u> A הפיכה $\Longleftrightarrow$ לכל $\underline{b}$ יש פתרון $A\underline{x}=\underline{b}$

לכן נותר $(\Longleftarrow)$

$(\overset{(*)}{\Longrightarrow})$ בצורה ישירה:

ידוע שלכל $\underline{b}$ יש פתרון (אולי כמה) למשל:

$$(\#)\quad A\underline{x}=\underline{b}:\quad A\underline{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\ A\underline{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\ \dots,\ A\underline{x}_n=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

מן הנתון, קיימים $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ הפותרים את המע'. כלומר:

$$A\cdot\begin{bmatrix}| & & |\\ \underline{x}_1 & \cdots & \underline{x}_n\\ | & & |\end{bmatrix}\underset{\text{מכפל מטריצה-עמודה}}{=}\begin{bmatrix}| & & |\\ A\underline{x}_1 & \cdots & A\underline{x}_n\\ | & & |\end{bmatrix}\overset{(\#)\text{ נציב}}{=}\begin{bmatrix}1 & 0 & & 0\\ 0 & 1 & & \vdots\\ & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & 0\\ 0 & 0 & & 1\end{bmatrix}=I$$

לכן A הפיכה כנדרש.

מ.ש.ל.

מרחבים וקטוריים

יהי: $\mathbb{F}$ שדה. אומרים כי קב׳ V הנ״ל מ״ו מעל $\mathbb{F}$ אם:

$$(\underbrace{V}_{\text{קבוצת הווקטורים}},\ \underbrace{0_V}_{\text{אפס של } V},\ \underbrace{+_V}_{\text{פעולה של } V})$$

<u>אקסיומות מ״ו</u>:

① <u>סגירות</u> החיבור: $\forall v,w\in V:\ v+w\in V$

② החיבור <u>חילופי</u>: $\forall v,w\in V:\ v+w=w+v$

③ החיבור <u>אסוציאטיבי</u>: $\forall u,v,w\in V:$
$$(u+v)+w=u+(v+w)$$

④ <u>ניטרלי</u>: $\forall v\in V,\quad 0+v=v+0=v$

⑤ <u>נגדי</u>: $\forall v\in V\ \ \exists \underset{=-v}{u}\in V:\ v+u=u+v=0$

<u>כפל בסקלר</u>: פעולה של איבר מהשדה ״כפול״ וקטור:

⑥ <u>סגירות</u>: $\alpha\in\mathbb{F},\ v\in V,\quad \alpha\cdot v\in V$

⑦ <u>אסוציאטיביות של כפל בסקלר</u>: $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{F},\ \forall v\in V:$
$$\alpha\cdot\underbrace{(\beta\cdot v)}_{V}=\underbrace{(\alpha\beta)}_{\text{כפל בשדה}}\cdot V$$

⑧ <u>דיסטריביוטיביות</u>: $\forall\alpha\in\mathbb{F},\ \forall u,v\in V:$
$$\alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v$$

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}\ \ \forall v\in V:$

$v \in V$

$$\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{חיבור בשדה}}\cdot v = \alpha\cdot v + \beta\cdot v$$

דוגמאות:

① יהי $\mathbb{F}$ שדה, אזי **$\mathbb{F}$ מרחב מ"ו מעל עצמו!**

$$\begin{cases} +_V = +_{\mathbb{F}} \\ \bullet = \cdot_{\mathbb{F}} \\ 0_V = 0_{\mathbb{F}} \end{cases}$$

② $\mathbb{F}^n$ - וקטורי עמודה,

(איבר ניטרלי: $\begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix} = 0_V$)

חיבור:

$$\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1+b_1\\ \vdots \\ a_n+b_n\end{bmatrix}$$

כפל בסקלר:

$$\alpha\cdot\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha a_1\\ \vdots \\ \alpha a_n\end{bmatrix}$$

פעולות אלה מקיימות לאקסיומות המ"ו, ולכן מקבלים ש- $\mathbb{F}^n$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

לדוגמה, דיסט': $\alpha\in\mathbb{F}$, $v,w\in\mathbb{F}^n$ $\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots \\ v_n\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}w_1\\ \vdots \\ w_n\end{bmatrix}$

$$\alpha\cdot(v+w) \overset{\text{הגד' }+}{=} \alpha\cdot\begin{bmatrix}v_1+w_1\\ \vdots \\ v_n+v_n\end{bmatrix} \overset{\text{הגד' }\bullet}{=} \begin{bmatrix}\alpha(v_1+w_1)\\ \vdots \\ \alpha(v_n+w_n)\end{bmatrix} \overset{\text{דיסט' בשדה!}}{=}$$

$$= \begin{bmatrix}\alpha v_1+\alpha w_1\\ \vdots \\ \;\end{bmatrix} \overset{\text{הגד' }+}{=} \begin{bmatrix}\alpha v_1\\ \vdots \\ \;\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha w_1\\ \vdots \\ \;\end{bmatrix} \overset{\text{הגד' }\bullet}{=}$$

$[\alpha v_n + \alpha w_n]$ $[\alpha v_n]$ $[\alpha w_n]$

$$= \alpha \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \alpha \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$$

הערה: אנו מגדירים כפל בסקלר רק משמאל
(אפשר להגדיר, אך אין בזה טעם,

$\alpha \cdot v$

$\cancel{v \cdot \alpha}$

3) מטריצות $\mathbb{F}^{n\times m}$ כמ"ו מעל $\mathbb{F}$

הגדרת +

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

הגדרת • כפל בסקלר

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}$$

הערה: נכון שניתן להגדיר על מט' (המבנים המתמטיים) כפל
בין מט' (ולא רק סקלר במט') אך לצורך הגדרת
מרחב המט' כמ"ו, אנו מתעלמים מכפל מטריצות.

4) פולינומים

יהי $\mathbb{F}$ שדה ו- $d \geq 0$. נגדיר:

$$\boxed{\mathbb{F}_d[x] := \{ \underbrace{p(x) \in \mathbb{F}[x]}_{\text{פולינום עם מקדמים ב-}\mathbb{F}} \mid \underbrace{\deg p}_{\text{דרגה}} \leq d \}}$$

- דוגמה

דוגמה = 3 ← 3 ... 2 ... 2 ...

$\mathbb{R}_3[x] \ni 1+2x+3x+x$ ...

$\not\ni 1+4x^5$ ⇐ דרגה $= 5$

$\mathbb{C}_2[x] \ni i+7x^2 \notin \mathbb{R}_2[x]$

$\mathbb{Q}_3[x] \ni \frac{1}{2}+\frac{7}{8}x+\frac{13}{94}x^2+\frac{16}{47}x^3$

$\mathbb{Q}_3[x] \not\ni \sqrt{2}+x$ (כי $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$)

$(\mathbb{R}_3[x] \ni \sqrt{2}+x)$

הדרגה $\leq d$, כלומר:

$1+\frac{1}{2}x \in \mathbb{Q}_2[x]$

$3 \in \mathbb{Q}_2[x]$ (פולינום מדרגה 0)

(5) כאשר $\mathbb{K}$ שדה, ו- $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{K}$ תת-שדה, אז $\mathbb{K}$ (עם פעולת החיבור שלו, והכפל = כפל בסקלר) הינו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

$\left.\begin{matrix}\alpha\in\mathbb{F}\\ v\in\mathbb{K}\end{matrix}\right]\ \alpha v\in\mathbb{K}$

למשל: * $\mathbb{C}$ הינו מ"ו מעל $\mathbb{R}$:

- $(x+iy)+(w+iz)=(x+w)+i(y+z)$
- $\underbrace{r\in\mathbb{R}}, \underbrace{x+iy}^{\in\mathbb{C}}: r\cdot(x+iy)=(rx)+i(ry)$

* $\mathbb{R}$ הינו מ"ו מעל $\mathbb{Q}$: (הוא שדה)

חיבור בין שני ממשיים:

$\sqrt{2}+\pi\sqrt{3}$

כפל ב...: $\frac{11}{\ldots}\ \pi\sqrt{3}\ \ldots\ 11\,\pi\sqrt{3}$

אם ממשיך: "כפול $\overline{17}$" := כפול , 17

17 — $\mathbb{Q}$ — בתפקיד סקלר

כפול — $\mathbb{R}$ — בתפקיד וקטור

(ע $\mathbb{C}$ יכול להיות מ"ו מעל $\mathbb{Q}$...)

<u>הגדרה:</u> יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$.
תהא $W \subseteq V$ תת-קבוצה של V המהווה מ"ו בפני עצמה (ביחס ל- $0, +$ של V).
אז: אומרים כי $\boxed{W \leq V}$ <u>תמ"ו</u> של V (מעל אותו שדה $\mathbb{F}$).

<u>קריטריון שימושי לתמ"ו:</u> נתון V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ונתונה תת' $W \subseteq V$:
אם:

(וידאנו: $0_V = 0_W$, $+_V = +_W$)

① $0 \in W$ (בפרט ה-0 של V)

② $\forall w_1, w_2 \in W$: $w_1 + \alpha w_2 \in W$
$\forall \alpha \in \mathbb{F}$

אז: $W \leq V$ תמ"ו. (קריטריון הכרחי ומספיק.)

<u>דוגמאות:</u>

① לכל מ"ו V מעל שדה $\mathbb{F}$ מתקיים:
$V \leq V$ (V תמ"ו של עצמו)

② לכל מ"ו V מעל שדה $\mathbb{F}$ מתקיים:
$\{0_V\} \leq V$ ("תמ"ו האפס")

הוכחה:

$$0_V+\alpha\cdot 0_V = 0_V+0_V = 0_V$$

$$\alpha\cdot 0_V \underset{0_V \text{ ניטרלי}}{=} \alpha\cdot(0_V+0_V) \underset{\text{פילוג}}{=} (\alpha\cdot 0_V)+(\alpha\cdot 0_V)$$

$+(-\alpha\cdot 0_V)$ קיום נגדי:

$$\boxed{0_V = \alpha\cdot 0_V}$$

11^{00}.

מרחבים ותתי-מרחבים — דוגמאות

$(k<n)$

① $$\left\{ \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} : \alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{F}\right\} = W \subseteq \underbrace{\mathbb{F}^n}_{V}$$

($n-k$ אפסים)

$\underline{W\le\mathbb{F}^n}$: בעזרת הקריטריון לתמ"ו:

① $$\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\in W$$

② $$\forall w_1,w_2\in W,\ \forall\lambda\in\mathbb{F}:\ w_1+\alpha w_2 \overset{?}{\in} W$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\lambda\cdot\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \underset{\text{חיבור לפי } V}{=} \begin{bmatrix}\alpha_1+\lambda\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_k+\lambda\beta_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\in W$$

$\mathbb{N} \cap k\}$

$0_V \notin$

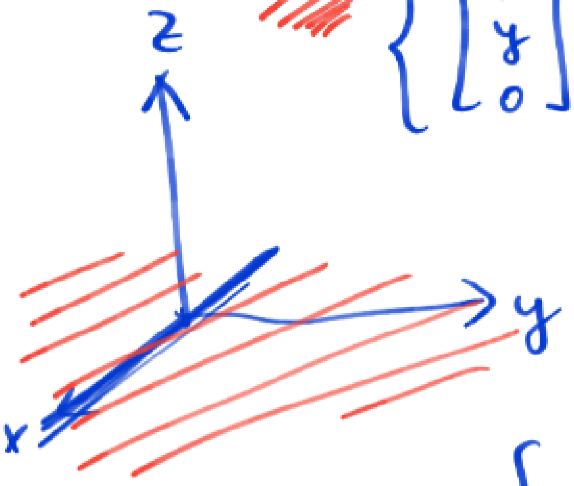
$$\left\{ \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_k \\ 1_{\mathbb{F}} \\ \vdots \\ 1_{\mathbb{F}} \end{bmatrix} : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \right\}$$

$n-k$

$(1 \neq 0)$

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \leq \mathbb{R}^3$$ ③

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \leq \mathbb{R}^3$$



$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ -iz \\ 2z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\} \underset{V}{\subseteq} \mathbb{C}^3$$ ④

W

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ -1 \\ -2i \end{bmatrix}, \dots \in W \quad : \text{Ser.} \right)$$

$: W \leq \mathbb{C}^3$

① $$0_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 \end{bmatrix} \in W$$

$(z = 0)$

② $\forall w_1, w_2 \in W, \forall \lambda \in \underset{\mathbb{C}}{\mathbb{F}} : \quad w_1 + \lambda w_2 \in W :$

$$w_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ -iz_1 \\ 2z_1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} z_2 \\ -iz_2 \\ 2z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 + \lambda z_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} (z_1 + \lambda z_2) \end{bmatrix}$$

$$w_1+\lambda w_2 = \begin{bmatrix} \cdots \\ -iz_1+\lambda\cdot(-iz_2) \\ 2z_1+\lambda\cdot(2z_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots \\ -i(z_1+\lambda z_2) \\ 2(z_1+\lambda z_2)\end{bmatrix}$$

נגדיר $z_3=z_1+\lambda z_2$, ונקבל כי וקטור זה אכן $\in W$.

(5) $$W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} : x,y\geq 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

האם $W\leq \mathbb{R}^2$?

(1) $0\in W$

(2) $\forall w_1,w_2\in W : w_1+w_2\in W$:אולם

אולם! לא מתקיימת הקומבינציה הנ"ל:

$$\forall w_1,w_2\in W\ \forall\lambda\in \mathbb{F}\ (\mathbb{R}) : w_1+\lambda w_2\in W$$

לדוג': $w_1=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $w_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\lambda=-1$

$$w_1+\lambda w_2=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+(-1)\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\notin W.$$

לכן W איננו תמ"ו.

(6) $$W=\left\{\begin{bmatrix}x\\-2x\\y\\x+y\end{bmatrix} : x,y\in\mathbb{R}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$$

(לדוג': $\begin{bmatrix}1\\-2\\2\\3\end{bmatrix}\in W$)

(1) $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\in W$

$x=y=0$ נציב

(2) $\forall w_1,w_2\in W, \forall\lambda\in\mathbb{R} : w_1+\lambda w_2 \overset{?}{\in} W$

$$\begin{bmatrix}x_1\\-2x_1\\ \cdots\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}x_2\\-2x_2\\ \cdots\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+\lambda x_2\\-2(x_1+\lambda x_2)\\ \cdots\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ y_1 \\ x_1+y_1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \vdots \\ y_2 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ y_1+\lambda y_2 \\ (x_1+\lambda x_2)+(y_1+\lambda y_2) \end{bmatrix} \in W$$

סגור: $\rightarrow x_3 = x_1 + \lambda x_2$

$\rightarrow y_3 = y_1 + \lambda y_2$

$$\left(\begin{bmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ y_3 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix} \in W \right)$$

⑦ $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ מט' $n\times n$ (מ"ו מעל $\mathbb{F}$)

$W_1 = \{$מט' סקלריות$\}$ $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$, $W_2 = \{$מט' אלכסוניות$\}$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$W_3 = \{$מט' משולשות עליונות$\}$ $\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

$W_1, W_2, W_3 \leq \mathbb{F}^{n\times n}$ תמ"ו.

דוגמה: W_3.

① $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in W_3$

$W_3 = \{ A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid A_{ij} = 0 \quad \forall\, i>j \}$

② $A, B \in W_3,\ \lambda \in \mathbb{F}:\quad A + \lambda B \overset{?}{\in} W_3$

הוכחה -

$$(A+\lambda B)_{ij} = A_{ij} + \lambda B_{ij} = 0+\lambda\cdot 0 = 0$$

אם $i>j$ אז $A_{ij}=B_{ij}=0$

לכן, לכל $i>j$, $(A+\lambda B)_{ij}=0$ כלומר

$A+\lambda B\in W_3$, כנדרש. מ.ש.ל.

(8) $V=\mathbb{F}_d[x]$

פולינומים עם מקדמים ב-$\mathbb{F}$ ודרגה $\le d$.

$W=\{p(x)\in V \mid p(17)=0\}$: כאלו שמציבים $x=17$, הפולינום מתאפס

$W \overset{?}{\le} V$:

(1) איבר ה-0 של V הוא פולינום האפס, כלומר 0. וצ"ל $0\in W$.

אם נציב בפולינום 0 את 17, נקבל 0.

$$0(17)=0$$

פולינום קבוע המחזיר תמיד 0 !!!

(2) $\forall p_1(x),p_2(x)\in W,\ \forall\lambda\in\mathbb{F}$:

נציב $x=17$ ונראה מה קורה: $p_1(x)+\lambda p_2(x) \overset{?}{\in} W$

$$p_1(17) + \lambda p_2(17) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$$

לכן, $.W \leq V$

(8) $\{p(x) \mid p(17) = 17\} \subseteq V = \mathbb{F}_d[x]$

האם זהו תמ"ו?

לא, כי פולינום האפס אינו שייך לקבוצה זו:

$0 \neq 17$

(קבוע $\neq 17$...)

(9) אם $e \leq d$ אז: $\mathbb{F}_e[x] \leq \mathbb{F}_d[x]$.

$$\{p \mid \deg \leq e\} \qquad \{p \mid \deg p \leq d\}$$

(1) $\text{"}\deg(0) = 0\text{"} \leq e \Rightarrow 0 \in \mathbb{F}_e[x]$

פולינום האפס

(2) $\forall p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{F}_e[x]$

$$p_1(x) = \alpha_0 + \cdots + \alpha_e x^e \qquad (a_i \in \mathbb{F})$$
$$p_2(x) = \beta_0 + \cdots + \beta_e x^e$$
$$\Downarrow$$
$$p_1(x) + \lambda p_2(x) = (\alpha_0 + \lambda\beta_0) + \cdots + (\alpha_e + \lambda\beta_e) x^e$$

מדרגה לכל היותר e, לכן, שייך ל- $\mathbb{F}_e[x]$.

חיתוך וסכום של תמ"ו

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $W_1, W_2 \leq V$ תמ"ו.

<u>הגדרה</u>: $W_1 \cap W_2 = \{ v \in V \mid v \in W_1 \wedge v \in W_2 \}$

<u>החיתוך</u> של תתי-המרחבים.

<u>טענה</u>: $W_1 \cap W_2 \leq V$.

<u>הוכחה</u>: לפי הקריטריון:

① $0_V \overset{?}{\in} W_1 \cap W_2$

נתון כי $W_1, W_2 \leq V$ ולכן $0 \in W_1, 0 \in W_2$ ולכן $0 \in W_1 \cap W_2$.

② $\forall u_1, u_2 \in W_1 \cap W_2, \lambda \in \mathbb{F}: u_1 + \lambda u_2 \overset{?}{\in} W_1 \cap W_2$

- $u_1, u_2 \in W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \Rightarrow u_1, u_2 \in W_1$

אבל W_1 תמ"ו ולכן $u_1 + \lambda u_2 \in W_1$

בדומה:

- $u_1, u_2 \in W_1 \cap W_2 \subseteq W_2 \Rightarrow u_1, u_2 \in W_2$

אבל W_2 תמ"ו ולכן $u_1 + \lambda u_2 \in W_2$

לכן, $u_1 + \lambda u_2 \in W_1 \cap W_2$ כנדרש. מ.ש.ל.

<u>דוגמאות</u>:

① $V = \mathbb{F}^3$

$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{F} \right\}$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{F} \right\}$$

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{F} \right\}$$

② $V = \mathbb{F}^{n \times n}$

$W_1 = \{$ משולשית עליונה $\}$

$W_2 = \{$ משולשית תחתונה $\}$

$$W_1 \cap W_2 = \{ \text{מט' אלכסוניות} \} \Leftarrow \begin{bmatrix} \forall i>j,\ A_{ij}=0 \\ \forall i<j,\ A_{ij}=0 \\ \Downarrow \\ \forall i \neq j,\ A_{ij}=0 \end{bmatrix}$$

③ $V = \mathbb{R}^4$

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : x,y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ הוכחה פורמלית:

יהי: $w \in W_1 \cap W_2$, נוכיח $w = 0$.

נסמן: $w = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$.

בפרט, $w \in W_1$, אזי $\gamma = \delta = 0$.

$w \in W_2$ ... $\alpha = \gamma = 0$

$$\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \delta \end{cases}$$ [illegible], $w = w_2$, [illegible]

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \gamma = \delta = 0$$
$$\beta = \delta \implies \beta = 0$$

קיבלנו: $w = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$.

<u>הערה:</u> $W_1, W_2 \le V$ <u>בדר"כ</u> $W_1 \cup W_2$ <u>אינו</u> תמ"ו.

<u>למשל:</u> (תרגיל בתרגול: $W_1 \cup W_2$ תמ"ו אמ"מ $W_1 \subseteq W_2$ או $W_2 \subseteq W_1$.)

$\mathbb{R}^2$ $\begin{bmatrix}0\\*\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}*\\0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \notin \begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix}$ לכן אינו סגור לחיבור.

$\{\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$ ״ $\{\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$

<u>סכום של תמ"וים</u>

<u>הגדרה:</u> יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $W_1, W_2 \le V$.
נגדיר:

$$W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

זה <u>סכום</u> תת-המרחבים.

<u>טענה:</u> $W_1 + W_2 \le V$.

<u>הוכחה:</u> לפי הקריטריון:

① $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$.

$0 \in W_1$
$0 \in W_2$

② $u, v \in W_1 + W_2$, $\lambda \in \mathbb{F}$

צ"ל: $u + \lambda v \overset{?}{\in} W_1 + W_2$.

$u \in W_1 + W_2 \implies u = u_1 + u_2 \;:\; u_1 \in W_1, u_2 \in W_2$
$v \in W_1 + W_2 \implies v = v_1 + v_2 \;:\; v_1 \in W_1, v_2 \in W_2$

כעת:

$$u + \lambda v = (u_1 + u_2) + \lambda(v_1 + v_2) =$$
$$= (u_1 + \lambda v_1) + (u_2 + \lambda v_2) \in W_1 + W_2$$

כי $u_1 + \lambda v_1 \in W_1$, שהרי $W_1 \leq V$,
וכן $u_2 + \lambda v_2 \in W_2$, שהרי $W_2 \leq V$.

מ.ש.ל.

הערה: מתקיים תמיד: $W_1, W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

(יהי $v \in W_1$, ניקח $0 \in W_2$:
$v = v + 0 \in W_1 + W_2$
ובדומה ל- $v \in W_2$.)

דוגמאות:

① $V = \mathbb{F}^3$,
$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{F} \right\}$$
$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{F} \right\}$$

$$W_1 + W_2 = \mathbb{F}^3 \quad (= V)$$

הוכחה:

$\underline{\quad}3$

יהי: $v \in \mathbb{F}^3$, נוכיח $v \in W_1+W_2$.

$s,t,u \in \mathbb{F}$: $v = \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \end{bmatrix}$ ולכן:

$$v = \underbrace{\begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix}}_{\in W_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}}_{\in W_2} \in W_1+W_2.$$

② $V = \mathbb{F}^{n\times n}$

$W_1 = \{$ משולשות עליונות $\}$

$W_2 = \{$ משולשות תחתונות $\}$

$$W_1 + W_2 = \mathbb{F}^{n\times n} \quad (=V)$$

<u>הוכחה:</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\in W_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ a_{21} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots \; a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}}_{\in W_2}$$

③ $V = \mathbb{R}^4$

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} : x,y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

נטען כי:

$$W_1+W_2=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\0\\z\end{bmatrix} : x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

$(\subseteq)$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\z\\0\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ *\\0\\ *\end{bmatrix}\in$$ מימין 33

$(\supseteq)$

$$\begin{bmatrix}a\\b\\0\\c\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}a\\b-c\\0\\0\end{bmatrix}}_{W_1}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\c\\0\\c\end{bmatrix}}_{W_2}.$$

④ יהי $V=\mathbb{F}_d[x]$ $(d\geq 1)$. יהי $\alpha\neq\beta\in\mathbb{F}$. נגדיר:

$$W_\alpha=\{p(x)\in V \mid p(\alpha)=0\}\leq V$$

$$W_\beta=\{p(x)\in V \mid p(\beta)=0\}\leq V$$

אזי:

$$W_\alpha\cap W_\beta=\{p(x)\in V \mid p(\alpha)=p(\beta)=0\}.$$

מה הסכום?

$$W_\alpha+W_\beta=V.$$

<u>הוכחה</u>:

יהי $p(x)\in\mathbb{F}_d[x]$, נוכיח כי: $p(x)\in W_\alpha+W_\beta$.

נרצה להציג:

$$p(x)=\underbrace{q_1(x)}_{\text{מתאפס ב-}\alpha}+\underbrace{q_2(x)}_{\text{מתאפס ב-}\beta}$$

באופן שקול, נחפש $q(x)$:

$$p(x) \overset{\text{תמיד נכון}}{=} \underbrace{\left(p(x) - q(x)\right)}_{\text{מתאפס ב-}\alpha} + \underbrace{q(x)}_{\text{מתאפס ב-}\beta}$$

כלומר, דרישות על $q(x)$:

$$\begin{cases} ① & q(x) \in \mathbb{F}_d[x] \\ ② & q(\beta) = 0 \\ ③ & q(\alpha) = p(\alpha) \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $p(x) - q(x)$ מתאפס ב-α.

ניקח:

$$q(x) = \frac{x-\beta}{\alpha-\beta} \cdot \underbrace{p(\alpha)}_{\in \mathbb{F}} =$$

$$\left(= \frac{p(\alpha)}{\alpha-\beta} \cdot x - \frac{\beta \cdot p(\alpha)}{\alpha-\beta} \right)$$

q פולינום לינארי:

$$① \quad q(x) \in \mathbb{F}_1[x]$$

נבדוק:

$$② \quad q(\beta) = \frac{\cancel{\beta-\beta}^{\,0}}{\alpha-\beta} \cdot p(\alpha) = 0$$

$$③ \quad q(\alpha) = \frac{\cancel{\alpha-\beta}^{\,1}}{\cancel{\alpha-\beta}} \cdot p(\alpha) = p(\alpha)$$

כנדרש.

לסיכום, כתבנו את $p(x)$ כסכום של:

$$\underbrace{(p(x)-q(x))}_{W_\alpha} + \underbrace{q(x)}_{W_\beta}$$

ולכן $q \in W_\alpha + W_\beta$. מכיוון שזה נכון לכל $q \in V$,

הוכחנו כי: $V = W_\alpha + W_\beta$, כנדרש. מ.ש.ל.