תרגול 9- אושרית

שקילות עוצמות, קבוצות בנות מנייה, עוצמת הממשיים

עוצמות:

הגד: יהיו A,B 2 קב' אזי:

1. אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע ועל אזי-אומרים של-A ול-B יש אותה עוצמה. **סימון:** $|A|=|B|$.
2. אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע אזי-אומרים כי העוצמה של A קטנה או שווה לזו של B. **סימון:** $|A|\leq|B|$.
3. אם $|A|\leq|B|$ וגם $|A|\neq|B|$ אזי-אומרים כי העוצמה של A קטנה ממש מהעוצמה של B. **סימון:** $|A|<|B|$.

הערה: שימו ♡ - לא מגדירים את המונח עוצמה, אלא- מגדירים שקילות עוצמות. כלומר- מתי עוצמה של 2 קב' שווה זו לזו.

דוג': יהיו A, B קב' סופיות. אזי- אם מס' האיברים בהן שווה עוצמתן שווה, ואם מס' האיברים ב- A גדול ממנו של B, אזי- ~~גדו~~ עוצמתה של A גדולה יותר.

הבהרה: לכל קב' סופית עם n איברים $\leftarrow$ $|A|=n$

דוג': $|\{1,2,3\}| = |\{1000,200,5\}|$

טענות: 1. $|\mathbb{N}|\le|\mathbb{Z}|$ **הוכחה:** נגדיר פונק' $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך ש- $f(x)=x$ פונק' ההכלה.

כיוון שהיא חח"ע ולכן- לפי הגד' 2 אכן- מתקיים.

הכלה של טענה 1 $\leftarrow$ 2. אם $A\subseteq B$ $\leftarrow$ $|A|\le|B|$.

הוכחה: נגדיר $f:A\to B$ פונק' ההכלה השולחת כל איבר לעצמו. פונק' זו חח"ע ולכן- $|A|\le|B|$.

תרגיל: צ"ל: $|\mathbb{N}|\le|\mathbb{Z}|$ פתרון: נבנה פונק' חח"ע מ-$\mathbb{Z}$ ל-$\mathbb{N}$. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$

$$f(x)=\begin{cases} 2x & x>0 \text{ אם} \\ -2x+1 & x<0 \text{ אם} \\ 1 & x=0 \text{ אם} \end{cases}$$

נראה ש-f שהגדרנו - חח"ע. יהיו $x,y\in\mathbb{Z}$ שונים כך כי $x\neq y$ ונראה להראות כי $f(x)\neq f(y)$.

חלוקה למקרים: 1. אם $x\neq y$ ושניהם שליליים אזי: $f(x)=-2x+1$ $f(y)=-2y+1$ וברור שהם שונים.

2. אם $x\neq y$ ושניהם חיוביים אזי $f(x)=2x$ $f(y)=2y$ וברור שהם שונים

3. אם בה"כ $x>0,\ y<0$ אזי- $f(x)=\underbrace{2x}_{\text{זוגי}}$ $f(y)=\underbrace{-2y+1}_{\text{אי זוגי}}$ זוגי $\neq$ אי זוגי! וברור ששונים.

4. אם בה"כ $x=0$ y חיובי או שלילי $f(x)=1$ $f(y)=2y/-2y+1$ ($\neq 1$) ולכן - שונים.

סה"כ - f חח"ע

תרגיל: הוכח ש $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\cup\{0\}|$

הוכחה: נגדיר פונק' $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ ע"י: $f(n)=n-1$. חח"ע ועל - כי יש לה הופכית $g:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{N}$, $g(n)=n+1$

2

תכונות: 1. אם $|A|=|B|$ אזי $|B|=|A|$. (סימטריות)

2. אם $|A|=|B| \wedge |B|=|C|$ אזי $|A|=|C|$ (טרנזיטיביות)

3. לכל קב' A - $|A|=|A|$. (רפלקסיביות)

הוכחות:

1. אם $|A|=|B|$ אזי קיימת פונק' $f:A\to B$ חח"ע ועל. ⇐ f הפיכה וקיימת ל-f הופכית f' כך ש- $f':B\to A$ (גם) חח"ע ועל ולכן - $|B|=|A|$.

2. $|A|=|B|$ ⇐ קיימת פונק' $f:A\to B$ חח"ע ועל.
$|B|=|C|$ ⇐ קיימת פונק' $g:B\to C$ חח"ע ועל.
⇐ נתבונן ב $g\circ f$. $g\circ f: A\to C$ חח"ע ועל ⇐ $|A|=|C|$

3. לכל קב' A ניתן להגדיר פונק' חח"ע ועל לעצמה פונק' הזהות.

מסקנה: לכן - ניתן לומר כי שוויון עוצמות הוא יחס שקילות. פרט לעובדה שקב' כל הקב' - לא קיימת.

טענה 1

טענה: אם ~~A→B~~ $f: B\to A$ פונק' על אז- $|A|\le|B|$.

הוכחה: המטרה שלנו- לבנות פונק' $g:A\to B$ חח"ע

מכיוון שלכל איבר ב-A יש מקור ב-B, כי f על. אז- ~~כעת~~ כל איבר a כזה נשלח ל-1 המקורות שלו

ב-b באופן הבא- $g(a)=b$.

נוכיח כי g חח"ע ← נניח ש $b=g(a_1)=g(a_2)$ כלומר מתקיים - $f(b)=a_1 \wedge f(b)=a_2$

$\perp$ f פונק' ולכן- חד ערכית

$a_1=a_2$.

טענה 2

טענה: אם A קבוצה ו-R יחס שקילות על הקבוצה אזי- עוצמת קבוצת המנה קטנה או שווה לעוצמה של A.

הוכחה: נגדיר- $f:A\to A/R$ ע"י: $f(a)=[a]_R$ (נוכיח כי- f על. לכל מחלקת שקילות יש נציג באיבר בעצמו)

ולכן- הפונ' על. $\Leftarrow$ $|A/R|\le|A|$

תרגיל:

אם $|A|\le|B| \wedge |B|\le|C|$ אזי $|A|\le|C|$.

הוכחה:

$|A|\le|B| \Leftarrow$ קיימת פונק' חח"ע $f:A\to B$ $|B|\le|C| \Leftarrow$ קיימת פונק' חח"ע $g:B\to C$

$\Leftarrow$ $g\circ f$ מקיימת $g\circ f:A\to C$ וחח"ע - הרכבה של פונק' חח"ע

טענה: אם $|C|=|D|$ ו- $|A|=|B|$ אזי- $|A\times C|=|B\times D|$

הוכחה: קיימת פונק' $f_1:A\to B$ חח"ע+על. $f_2:C\to D$ חח"ע+על.

נוכל להגדיר פונק' $g:A\times C\to B\times D$ חח"ע+על.

$g(a,c)=(f_1(a),f_2(c))$

נראה כי g חח"ע+על.

1. חח"ע $\Leftarrow$ נניח כי $g(a_1,c_1)=g(a_2,c_2)$

$(f_1(a_1),f_2(c_1))=(f_1(a_2),f_2(c_2))$

מהגד' שוויון של זוגות סדורים

$f_1(a_1)=f_1(a_2)$ $f_2(c_1)=f_2(c_2)$

f_1 חח"ע f_2 חח"ע

$a_1=a_2$ $c_1=c_2$ $(a_1,c_1)=(a_2,c_2)$

המשך הוכחה:

(2) על ← יהי $(b,d)\in B\times D$ ונראה לפונקציה שקיים מקור ל-(b,d) ב-$A\times C$.

$f_1:A\to B$ על ולכן ל-b קיים מקור $a\in A$ כך ש- $f_1(a)=b$

$f_2:C\to D$ על ולכן ל-d קיים מקור $c\in C$ כך ש- $f_2(c)=d$

לכן (a,c) מקור ל-(b,d) $g(a,c)=(f_1(a),f_2(c))=(b,d)$

תרגיל: יהיו A,B,C,D קב' כך ש- $|A|=|C|$, $|B|=|D|$, $A\cap B=\phi$, $C\cap D=\phi$

אז- $|A\cup B|=|C\cup D|$

פתרון: $|A|=|C|$ ⇐ קיימת $f:A\to C$ חח"ע ועל.

$|B|=|D|$ ⇐ קיימת $g:B\to D$ חח"ע ועל.

נגדיר פונק' $h:A\cup B\to C\cup D$ ונראה שהיא חח"ע+על.

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in A \\ g(x) & x\in B \end{cases}$$

נשים ♡ - כי הפונק' מוגדרת היטב - כי $A\cap B=\phi$.

ונראה כי h חח"ע+על.

חח"ע ⇐ נניח כי $h(x_1)=h(x_2)$ ונרצה להוכיח כי $x_1=x_2$.

נשים ♡ כי $C\cap D=\phi$ ולכן - נחלק למקרים:

I $h(x_1)=h(x_2)\in C$ ולכן - $\begin{cases} h(x_1)=f(x_1) \\ h(x_2)=f(x_2) \end{cases}$ $\Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \xRightarrow[\text{חח"ע}]{f} \boxed{x_1=x_2}$

$\cancel{f(x_1)=h(x_1)=h(x_2)=f(x_2)}$

II $h(x_1)=h(x_2)\in D$ ולכן - $\begin{cases} h(x_1)=g(x_1) \\ h(x_2)=g(x_2) \end{cases}$ $\Rightarrow g(x_1)=g(x_2) \xRightarrow[\text{חח"ע}]{g} \boxed{x_1=x_2}$

על ⇐ יהי $y\in C\cup D$ נרצה להוכיח כי קיים - $x\in A\cup B$ כך ש- $h(x)=y$. מקור ל- y.

בגלל ש- $C\cap D=\phi$ מתקיים רק אחד מ-2 המקרים הבאים: 1 $y\in C$ 2 $y\in D$.

צ"ל: יהי $y\in C\cup D$ נרצה להוכיח כי קיים $x\in A\cup B$ כך ש- $h(x)=y$. מקור ל-y.

בגלל ש- $C\cap D=\emptyset$ מתקיים רק 1 מ-2 המקרים הבאים: (1) $y\in C$ (2) $y\in D$.

מקרה (1) $y\in C$ ← ידוע ש-f פונק' על ולכן קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)=y$ ⇐ $h(a)=f(a)=y$ ומצאנו מקור ל-y

$A\subseteq A\cup B$

$a\in A\cup B$

מקרה (2) $y\in D$ ← ידוע ש-g פונק' על ולכן קיים $b\in B$ כך ש- $h(b)=g(b)=y$ ⇐ ומצאנו מקור ל-y.

$B\subseteq A\cup B$

$b\in A\cup B$

הגדרה: עוצמת הטבעיים - $|\mathbb{N}|=\aleph_0$

עוצמה זו - היא גם העוצמה של - $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ הוכחה לטענה אלו - בהרצאה.

הגדרה: קב' A נקראת קב' מנייה אם $|A|=\aleph_0$ או ש-A קב' סופית.

משפט: איחוד בן מנייה של קב' בנות מנייה הוא בן מנייה.

תרגיל: $|\mathbb{N}\times\{0\}\cup\mathbb{N}\times\{1\}\cup\mathbb{N}\times\{3\}| = |\mathbb{N}|$

פתרון: נבנה פונק' חח"ע+על: $f:\mathbb{N}\times\{0\}\cup\mathbb{N}\times\{1\}\cup\mathbb{N}\times\{3\}\to\mathbb{N}$

$$\left.\begin{aligned} f(n,0) &= 3n \\ f(n,1) &= 3n-1 \\ f(n,2) &= 3n-2 \end{aligned}\right\} \text{3 קב' זרות ב-} \mathbb{N}$$

סוג של הכללה של התרגיל הקודם עבור 3 קב' זרות. יכולים לנסות להוכיח הכללה שלה באינדוקציה כש"ל.

ש"ב : להוכיח ישירות כי הפונקציה שבנינו חח"ע ועל

הוכיחו כי אם $|A| = |B|$ אזי $|P(A)| = |P(B)|$

פתרון: מניחים כי קיימת $f : A \to B$ הפיכה. נגדיר $g : P(B) \to P(A)$ ע"י $B' \mapsto f^{-1}[B']$ הפיכה,

הוכחת ההפיכות

נמצא את הפונק ההופכית של g

$h : P(A) \to P(B)$

$h(S) = f[S]$

נראה שהם - הופכית

① $g \circ h(S) = f^{-1}[f[S]] = S$

כאשר f חח"ע
והראנו אם - כן

הוכחנו בתרגול קודם

② $h \circ g(S) = f[f^{-1}[S]] = S$

כאשר f על
והראנו אם - על

הוכחנו בתרגול קודם

. הוכיחו כי $|P(\mathbb{N})| = |P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}|$.

פתרון: נגדיר פונקציה $f : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$ ע"י $\emptyset \mapsto \{1\}$, $\{n\} \mapsto \{n+1\}$ וכל B שאינה נקודון ואינה קבוצה ריקה נשלחת לעצמה.

(נראה שהי' פונק' על ← נראה שלכל קב' $A \in P(\mathbb{N})-\boxed{\emptyset}$ יש מקור:

אם A - היא איבר אחד $\{a\}$ ששונה מ-1 אז: המקור שלה הוא ← $\{a-1\}$ כי $a>1$.

אם $A=\{1\}$ אז - המקור שלה הוא - קב' ריקה

אחרת - המקור שלה זו A עצמה.

נראה שהי' פונק' חח"ע: יהי' $A,B \in P(\mathbb{N})-$ כך ש- $f(A)=f(B)=C$ ונראה כי: $A=B$

נחלק למקרים: (1) אם C - קב' עם לפחות 2 איברים אז - $B=f(B)=f(A)=A$ ⇐ $A=B$ וסיימנו

(2) אם C ← הוא הנקודון $\{1\}$ ⇐ לפי הג' f ⇐ $A=B=\emptyset$ ⇐ וסיימנו

G(n)

(3) אם C ← הוא הנקודון $\{c\}$ ⇐ לפי הג' f ⇐ $B=A=\{c-1\}$ מחח"ע הפונק' שהי':

טענה: $|\mathbb{N}| \neq |(0,1)|$

כלומר - צריך להוכיח שלא קיימת פונק' חח"ע ועל מ-$\mathbb{N}$ ל-$(0,1)$.

מספיק להראות שלא קיימת פונק' על מ-$\mathbb{N}$ ל-$(0,1)$.

נניח בשלילה - קיימת פונק' $f:\mathbb{N}\to(0,1)$ על.

כל איבר ב-$(0,1)$ הינו מהצורה $0.x_1x_2x_3...$ סדרה אינסופית של מס' מ-0 עד 9.

$f(1)=0.x_1x_2x_3...$

$f(2)=0.y_1y_2y_3...$

$f(3)=0.z_1z_2z_3...$

נבנה מס' מ-$(0,1)$ שאין לו מקור.

איך נעשה זאת? נלך ל-$f(1)$ ונחליף לו את הספרה הראשונה אחרי הנק'.

נלך ל-$f(2)$ ונחליף לו את הספרה השנייה אחרי הנק'.

נלך ל-$f(3)$ ונחליף לו את הספרה השלישית אחרי הנק'.

⋮

נלך ל-$f(n)$ ונחליף לו את הספרה ה-n-ית שאחרי הנק'.

נקבל - מס' חדש שמורכב מההחלפות שעשינו - $0.x_1'y_2'z_3'...$

התקבל מס' ב-$(0,1)$ שאין לו מקור, כי דאגנו שהוא שונה מ-$f(n)$ לכל n.

לכן - f לא על.

מש"ל

עוצמת הממשיים או כל תת קטע בממשיים היא א

בהצלחה!!!