קואורדינטות

נסתכל $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = B_1$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = B_2$

$\left[\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right]_{B_1} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\left[\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

משפט: יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס ל-V ויהי $v \in V$ וקטור.
ראינו ש-v ניתן להצגה יחידה כצ"ל של B וההצגה שלו לפי הבסיס הוא וקטור שמורכב מהמקדמים של הצ"ל. באופן פורמאלי, ההצגה של v לפי בסיס B הוא **וקטור הקואורדינטות** המסומן $[v]_B \in \mathbb{F}^n$ ומוגדר להיות $[v]_B = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ כאשר $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$.

חשוב לזכור $[v]_B = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ אם"ם $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$

תרגיל: הוכח כי לכל בסיס B מתקיים
$v = 0$ אם"ם $[v]_B = 0$.

הוכחה: ישירות מההגדרה. B בת"ל ולכן הצ"ל היחידי שמתאפס זהו הצ"ל הטריאלי.

בהכללה:

$v_1 = v_2$ אמ"מ $[v_1]_B = [v_2]_B$

הערה: במרחבים הוקטוריים שאנו נעבוד איתם יש **בסיסים סטנדרטיים**. הייחוד של הבסיסים הסטנדרטיים הוא שקל מאד לחשב קואורדינטות לפיהם. נסתכל במרחבים וקטורים ובבסיסים הסטנדרטיים שלהם:

$\mathbb{R}^{2\times2}$

$S = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$\left[\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right]_S = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

מרחב וקטורי	בסיס סטנדרטי
$\mathbb{F}^n$	$(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)$
$\mathbb{F}^{m\times n}$	$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$
$\mathbb{F}_n[x]$	$1, x, x^2, \ldots, x^n$

דוגמא. חשב את הקואורדינטות של הוקטור $v = 1 + 2x - x^2$ לפי הבסיס הסטנדרטי S של $\mathbb{R}_3[x]$. למעשה הפולינום כמעט מוצג כצירוף לינארי של איברי הבסיס:

$S_{\mathbb{R}_3[x]} = \{1, x, x^2, x^3\}$

$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 1\cdot1 + 2\cdot x + (-1)\cdot x^2 + 0\cdot x^3$.

לפיכך $[v]_S = (1, 2, -1, 0)$.

דוגמא. חשב את הקואורדינטות של הוקטור (a, b, c) לפי הבסיס הסטנדרטי S של $\mathbb{F}^3$.

$a(1\ 0\ 0) + b(0\ 1\ 0) + c(0\ 0\ 1)$ $\quad [(a,b,c)]_S = (a,b,c)$

דוגמא. $V = \mathbb{R}^2, B = \{(1,1), (1,-1)\}$ מצא את הקואורדינטות של הוקטור $v = (a, b)$ לפי הבסיס B.

$v = \frac{a+b}{2}(1,1) + \frac{a-b}{2}(1,-1) \longrightarrow [v]_B = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$

$v = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{a+b}{2}\end{pmatrix}$

$v = (1 \; -1)\,(\frac{a-b}{2})$

תרגיל

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס לו. יהיו $u_1, \ldots, u_k \in V$ וקטורים כלשהם וסקלארים $\alpha_k \in \mathbb{F}$,$\alpha_i, \ldots$. הוכח:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i [u_i]_B = [\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i]_B$$

הוכחה:

עכיו $[u_1+u_2]_B = [u_1]_B + [u_2]_B$, $\alpha [u_1]_B = [\alpha u_1]_B$

את המעבר לכלל הכללי עשה באינדוקציה.

$u_1 = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$, $u_2 = b_1v_1 + \ldots + b_nv_n \longrightarrow [u_1]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\quad [u_2]_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$u_1 + u_2 = (a_1+b_1)v_1 + \ldots + (a_n+b_n)v_n \longrightarrow [u_1+u_2]_B = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$

$[u_1+u_2]_B = [u_1]_B + [u_2]_B$

$\alpha u_1 = \alpha a_1 v_1 + \ldots + \alpha a_n v_n \longrightarrow [\alpha u_1]_B = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot [u_1]_B$

מש"ל

מה זה אומר מעשית?

מסקנה:

2. $u_1, \ldots, u_k$ בת"ל אם"ם $[u_1]_B, \ldots, [u_k]_B$ בת"ל

3. $w \in span\{u_1, \ldots, u_k\}$ אם"ם $[w]_B \in span\{[u_1]_B, \ldots, [u_k]_B\}$

מטריצת מעבר

ראינו שקל מאד למצוא קואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי, נשתמש בהנחה הזו בהמשך. אנו מעוניינים לדעת כיצד לחשב קואורדינטות לפי בסיס כלשהו, לאו דווקא סטנדרטי.

משפט: יהא V מ"ו ויהיו E, F בסיסים לו. אזי **קיימת** מטריצה **יחידה** המסומנת $[I]_F^E$ המקיימת את הפסוק הבא:

$$\forall v \in V : [I]_F^E [v]_E = [v]_F$$

נסמן $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ו $F = \{w_1, \ldots, w_n\}$. אזי מתקיים ש$[I]_F^E$ הינה המטריצה שעמודותיה הן $[v_i]_F$

$$[I]_F^E = \left([v_1]_F \ldots [v_n]_F \right)$$

דוגמא. יהא $V = \mathbb{R}^2$ ושני בסיסים $E = \{v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ו

$$F = \{w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

נמצא את $[I]_F^E$.

מתקיים כי
$$v_1 = \mathbf{5}w_1 - \mathbf{2}w_2$$
$$v_2 = -\mathbf{1}w_1 + \mathbf{1}w_2$$

לכן

$$[I]_F^E = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט: לכל שני בסיסים E,F מטריצת המעבר הינה מטריצה הפיכה ומתקיים $([I]_F^E)^{-1} = [I]_E^F$

מסקנה:

אלגוריתם למציאת מטריצת מעבר בין כל שני בסיסים E,F

1. בחר בסיס סטנדרטי S מתאים למרחב שלך
2. מצא את מטריצת המעבר $[I]_S^E$. זה קל מאד שכן יש למצוא את הקואורדינטות של איברי הבסיס E לפי הבסיס הסטנדרטי S
3. מצא את מטריצת המעבר $[I]_S^F$.
4. הפוך את המטריצה האחרונה לקבל $([I]_S^F)^{-1} = [I]_F^S$
5. כפול את המטריצות על מנת לקבל את התוצאה הסופית $[I]_F^S [I]_S^E = [I]_F^E$

דוגמא:

מצא את $[I]_F^E$ כאשר $V = \mathbb{R}_2[x]$

$$E = \{\underbrace{1+x}_{e_1}, \underbrace{x+x^2}_{e_2}, \underbrace{x^2}_{e_3}\}, F = \{\underbrace{x}_{f_1}, \underbrace{1+x}_{f_2}, \underbrace{1+2x^2}_{f_3}\}$$

פתרון:

$S=\{1,x,x^2\}$

$$[I]_S^F=\left([f_1]_S\ [f_2]_S\ [f_3]_S\right)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$[I]_S^E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad [I]_F^E=[I]_F^S[I]_S^E$$

$$[I]_F^S=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0.5\\1&0&-0.5\\0&0&0.5\end{pmatrix}\longrightarrow[I]_F^E=\begin{pmatrix}-1&1&0.5\\1&0&-0.5\\0&0&0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1.5&0.5\\1&-0.5&-0.5\\0&0.5&0.5\end{pmatrix}$$

תרגיל

תהא $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&1&0\end{pmatrix}$

ובסיס

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס F כך ש $A=[I]_F^E$

פתרון:

$F=\{v_1,v_2,v_3\}$

$$A^{-1}=[I]_E^F=\left([v_1]_E\ [v_2]_E\ [v_3]_E\right)$$

ע"י חישובים $A^{-1}=\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}-4/3\\2/3\\1/3\end{matrix}}_{[v_1]_E}&\underbrace{\begin{matrix}1/3\\1/3\\-1/3\end{matrix}}_{[v_2]_E}&\underbrace{\begin{matrix}1\\-2\\1\end{matrix}}_{[v_3]_E}\end{pmatrix}$

$$v_1=-\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2/3\\-4/3\\1\end{pmatrix}$$

$$v_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\0\end{pmatrix}$$

$$v_3=1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

מטריצות מייצגות

הגדרה. תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית, ויהיו E, F בסיסים לV, W בהתאמה. נסמן $E = \{v_1, \dots, v_n\}$. אזי **המטריצה המייצגת** את T מבסיס E לבסיס F הינה המטריצה שעמודותיה הן הקואורדינטות לפי הבסיס F של התמונות של איברי הבסיס E. מסמנים

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [Tv_1]_F & [Tv_2]_F & \cdots & [Tv_n]_F \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

הערה : המטריצה $[T]_F^E$ היא המטריצה היחידה המקיימת את הטענה הבאה

לכל וקטור $v \in V$ מתקיים ש $[T]_F^E[v]_E = [Tv]_F$

הערה: שימו לב שמטריצת מעבר $[I]_B^{B'}$ היא מקרה פרטי של מטריצה מייצגת. היא מייצגת את העתקת הזהות (ומכאן הסימון) $I : V \to V$ כאשר B, B' שני בסיסים של המרחב.

$[I]_B^B = I$

דוגמא

דוגמא: $V = \mathbb{R}_2[x],\ W = \mathbb{R}^2$. ויהיו $F = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $E = \{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{x}, \underset{v_3}{x^2}\}$ בסיסים בהתאמה

נגדיר $T : V \to W$ ה"ל בעזרת משפט ההגדרה $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} b + c \\ a \end{pmatrix}$.

מצא את $[T]_F^E$

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [Tv_1]_F & [Tv_2]_F & [Tv_3]_F \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$T(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $[T(1)]_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $[T(x)]_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $[T(x^2)]_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה: שימו לב, כפי שראינו בתרגיל זה, שאם ניקח את הוקטורים $Tv_1, \dots, Tv_n$ ונשים אותם באופן נאיבי בעמודות מטריצה נקבל $[T]_S^E$ (כאשר S הוא הבסיס הסטנדרטי)

תרגיל (6.12)

תהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ העתקה של שיקוף ביחס לציר x. מצא בסיס סדור B ל $\mathbb{R}^2$ עבורו

$$[T]_B^B = [T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון.

$$T(a,b) = (a,-b)$$

$$B = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}} \right\}$$

$$[T]_B^B = \left([Tv_1]_B \ [Tv_2]_B \right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Tv_1 = T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

$$Tv_2 = \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix}$$

$$[Tv_1]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}}_{Tv_1} = -1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$[Tv_2]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = -a + 0c \longrightarrow a = 0 \\ -b = -b + 0d \longrightarrow -b = -b \\ c = 2a + c \longrightarrow c = c \\ -d = 2b + d \longrightarrow d = -b \end{cases}$$

צריך: לבחור b,c,d שיקיימו את התנאי וגם באופן שבו $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ יהוו בסיס.

$$b = 1 \quad c = 1 \quad d = -1$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל

יהיו V_1, V_2, V_3 מרחבים וקטורים עם בסיסים B_1, B_2, B_3 בהתאמה. יהיו $T : V_1 \to V_2$ $S : V_2 \to V_3$ שתי ה"ל אזי מתקיים $[S \circ T]_{B_3}^{B_1} = [S]_{B_3}^{B_2} \cdot [T]_{B_2}^{B_1}$

$v \in V_1$ $\quad [S \circ T(v)]_{B_3} = [S]_{B_3}^{B_2} \cdot [T]_{B_2}^{B_1} [v]_{B_1}$ נובע מיחידות המטריצה המייצגת

(נעשה בהרצאה)

מסקנה: V מ"ו. B, B' בסיסים ל-V $[I]_B^{B'}$ הפיכה

$$\left([I]_B^{B'}\right)^{-1} = [I]_{B'}^{B}$$

הוכחה - ישירות מהקודם

$$[I]_B^{B'} \cdot [I]_{B'}^{B} = [I]_B^B = I$$

תרגיל

יהי V מ"ו, B, C בסיסים, $T : V \to V$ הע"ל. הוכיחו או הפריכו: $([T]_B^C)^{-1} = [T]_C^B$.

פתרון

לא נתון אם T לא הפיכה.

$$[T]_B^C \cdot \underbrace{[T]_C^B [v]_B} = [T]_B^C \cdot [Tv]_C = [T^2 v]_B$$

תרגיל

$V = \mathbb{R}_2[x],\ W = \mathbb{R}^2$. ויהיו $E = \{-1, 2+x, 3+x+x^2\}, F = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$
בסיסים בהתאמה

נגדיר $T : V \to W$ ה"ל באופן הבא (בעזרת משפט ההגדרה)
$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix}b+c\\a\end{pmatrix}$. מצא את $[T]_F^E$