<u>משפט (עיקרון $\boldsymbol{Heine}$):</u> נניח $(Y,\rho),(X,d)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \to Y$ התנאים הבאים שקולים:

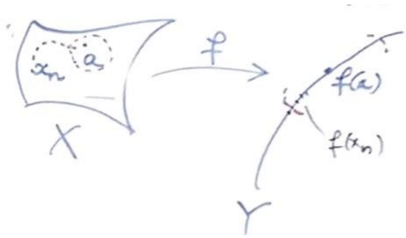
1) f רציפה.

2) f <u>שומרת על התכנסות</u> (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א, $\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$)

<u>הוכחה (עיקרון היינה):</u>

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>



נתון ש - $x_n \xrightarrow{d} a$. צ"ל - $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$.

f רציפה $\Leftarrow$ f רציפה בנקודה $a \in X$.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: f\big(B_\delta(a)\big) \subseteq B_\epsilon\big(f(a)\big)$$

(הגדרת $Cauchy$).

לפי הגדרת התכנסות, כמעט כל האיברים של x_n נמצאים בכדור $B_\delta(a)$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: x_n \in B_\delta(a)$$

אז כמעט כל האיברים של הסדרה $f(x_n)$ נמצאים ב- ϵ -סביבה: $B_\epsilon\big(f(a)\big)$

לכן הוכחנו: $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$.

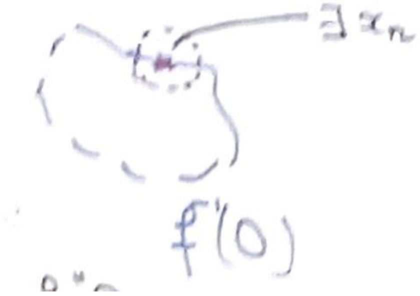
<u>$(2) \Leftarrow (3)$:</u>

נניח בשלילה ש – (3) לא מתקיים. ז"א:

$$\exists O \in top(\rho): f^{-1}(O) \notin top(d)$$

כלומר O פתוחה בעוד ש - $f^{-1}(O)$ לא פתוחה ב - (X,d).

ז"א קיימת נקודה "<u>לא פנימית</u>" – $\exists a \in f^{-1}(O): \forall \epsilon > 0\ \ B_\epsilon(a) \nsubseteq f^{-1}(O)$



עבור כל $\epsilon \coloneqq \frac{1}{n}$ קיים $x_n \in X$ כך ש –

$$\begin{cases} x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \\ x_n \notin f^{-1}(O) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(a, x_n) < \frac{1}{n} \\ f(x_n) \notin O \end{cases}$$

מהשורה הראשונה נובע ש $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ ולכן - $x_n \overset{d}{\to} a$.

על מנת לקבל סתירה, מספיק להוכיח – $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$.

$f(a) \in O \in top(\rho)$ וכן O פתוחה ולכן $f(a)$ נקודה פנימית ב O.

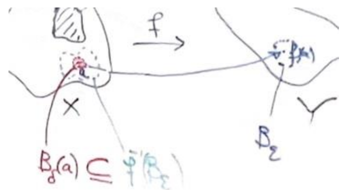
אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש – $B_\epsilon\big(f(a)\big) \subseteq O$

אבל מהשורה השנייה מקודם $f(x_n) \notin O$ ולכן $\forall n: f(x_n) \notin B_\epsilon\big(f(a)\big)$.

לכן – $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$

<u>$(3) \Leftarrow (1)$:</u>

בודקים את (1) - רציפות "דרך כדורים".



לכל $\epsilon > 0$ נתון – $O = B_\epsilon\big(f(a)\big) \in top(\rho)$ (למדנו שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה).

לכן בגלל (3) – $f^{-1}(O) = f^{-1}\Big(B_\epsilon\big(f(a)\big)\Big) \in top(d)$ גם פתוח.

אכן $a \in f^{-1}(O)$, ולכן a נקודה פנימית, אז קיים $\delta > 0$ כך ש –

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(O)$$

$$\Rightarrow f\big(B_\delta(a)\big) \subseteq f\big(f^{-1}(O)\big) \subseteq O = B_\epsilon\big(f(a)\big)$$

הוכחנו!

☺

<u>הערה:</u>

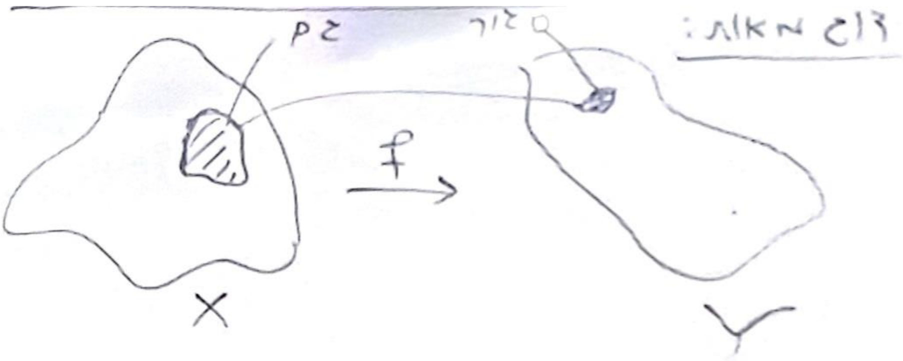
במשפט $Heine$ שלמדנו (3 תנאים) אפשר להוסיף תנאי רביעי על קבוצות סגורות.

4) מקור של קבוצה סגורה הוא גם סגור.

<u>הסבר מקוצר</u>: $f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c$

ובנוסף A סגורה אם ורק אם A^c פתוחה.

ולכן $(4) \Leftrightarrow (3)$.



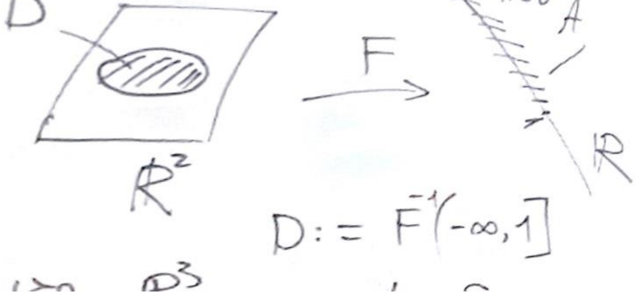
<u>דוגמאות:</u>

1)

$D \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$ סגור ב - $\mathbb{R}^2$.

<u>הסבר:</u> $F(x,y) \coloneqq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

רציפה (פונקציה פולינומיאלית!).



2) כל מישור ב - $\mathbb{R}^3$ סגור. למשל –

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\underbrace{2x+3y-4z+5}_{F(x,y,z)}=0\right\}$$

סגור, כי את D ניתן לכתוב כ - $D=F^{-1}(0)$ ואכן $\{0\}$ סגור ב - $\mathbb{R}$.

3) בכל מ"מ (X,d):

$$B_r[a]\coloneqq\{x\in X|d(a,x)\le r\}$$

$$S_r(a)\coloneqq\{x\in X|d(a,x)=r\}$$

סגורות!

<u>הסבר:</u>

נגדיר פו' $f_a:X\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=d(a,x)$. זוהי פונקציית ליפשיץ – $f_a\in Lip_1\subset C(X)$.

$f_a^{-1}(-\infty,r]=B_r[a]$ גם סגור!

$f_a^{-1}(\{r\})=S_r(a)$ גם סגור!

4) $B_r(a)$ פתוחה (באופן דומה).

$B_r(A)\coloneqq\{x\in X|d(x,A)<r\}$ פתוחה.

כאן יש צורך בפונקצית ליפשיץ $f_A(x)=d(x,A)$, $f_A:X\to\mathbb{R}$.

5) $GL_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ מטריצות הפיכות, <u>פתוחה</u> במרחב של מטריצות ריבועיות.

$$Mat_n(\mathbb{R})\overset{metr}{\simeq}\mathbb{R}^{n^2}$$

<u>הגדרות:</u> (X,d) מ"מ, $A\subseteq X$.

א) **"הסגור של A"** $(Closure\ of\ A)$:

$$A\underbrace{\subseteq}_{m_1}\bar{A}=cl(A)\coloneqq\{x\in X|\ d(x,A)=0\}$$

ב) **"סגור סדרתי"** $(sequential\ closure)$:

$$A\underbrace{\subseteq}_{\substack{\text{סדרה קבועה}\\\text{תמיד מתכנסת!}}}scl(A)\coloneqq\left\{x\in X\,\middle|\,\exists a_n\in A: x=\lim_{n\to\infty}a_n\right\}$$

משפט 1: בכל מ"מ תמיד $\boxed{scl(A) = cl(A)}$.

הוכחה:

$(\subseteq)$: נניח $z \in scl(A)$ אז –

$$\begin{cases} z = \lim_{n\to\infty} a_n \\ \exists a_n \in A \end{cases}$$

לפי הגדרה –

$$d(z, a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow d(z, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$$

המעבר נובע מהגדרת אינפימום.

$$\Rightarrow d(z, A) = 0$$

$$\Rightarrow z \in cl(A)$$

$(\supseteq)$:

$$z \in cl(A)$$

$$\Rightarrow \inf_{a\in A} d(z,a) = d(z, A) = 0$$

(לפי הגדרת inf).

נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$ כך ש –

$$\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{0}_{=0} \le d(z, a_n) \le \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$$

מכאן – $a_n \in A \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = z \in scl(A)$

☺

משפט 2 (קריטריון סגירות במ"מ): נניח (X, d) מ"מ, $A \subseteq X$. התנאים הבאים שקולים:

1) A סגורה ב – X (ז"א משלים לפתוחה).

2) $A = scl(A)$ (A סגורה לגבי הגבולות).

3) $A = cl(A)$.

4) A "קבוצת אפסים" של פונ' רציפה (ז"א קיימת פ' רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ כך ש - $A = f^{-1}(0)$).

הוכחה:

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

נניח בשלילה ש - $A \neq scl(A)$.

אז (בגלל ש - $A \subseteq scl(A)$) קיימת נק' –

$$\begin{cases} z \in scl(A) \\ z \notin A \end{cases}$$

לכן –

$$\begin{cases} z = \lim a_n \ , \exists a_n \in A \\ z \notin A \end{cases}$$

לכן –

$$\begin{cases} z = \lim a_n \ , \exists a_n \in A \\ z \in A^c \end{cases}$$

A סגורה (נתון). ז"א A^c <u>פתוחה</u>!

ואז z נקודה פנימית של A^c.

$$\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(z) \subseteq A^c$$

אז אף איבר של הסדרה a_n לא נמצה בכדור $B_r(z)$ וזאת סתירה ל –

$$\begin{cases} z = \lim a_n \\ a_n \in A \end{cases}$$

<u>$(2) \Leftarrow (3)$:</u>

בגלל משפט 1.

<u>$(3) \Leftarrow (4)$:</u>

נגדיר –

$$f_A(x) = d(x, A) \qquad f_A : X \to \mathbb{R} \ (\text{רציפה!})$$

אז –

$$f_A^{-1}(0) = \{x \in X | f_A(x) = 0\} = \{x \in X | d(x, A) = 0\} = cl(A) \underbrace{=}_{\text{נתון } 3} A$$

ולכן $f_A^{-1}(0) = A$.

<u>$(4) \Leftarrow (1)$:</u>

נפעיל "תוספת למשפט $Heine$" (מקור לסגור גם סגור) $f_A^{-1}(0)$ -- מקור של נקודון.

☺

<u>הגדרה:</u> במ"מ (X,d) עבור $A \subseteq X$, נגדיר –

$$A' := \{x \in X | x \in cl(A \backslash \{x\})\} \overset{metr}{=} \{x \in X | x \in scl(A \backslash \{x\})\}$$

נקודות ההצטברות של A.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו ש $z \in A'$ אם ורק אם קיימת סדרה ב A עם איברים שונים שמתכנסת ב X לנקודה z .

<u>רמז:</u> ראו בהרצאה 2 טענה (על נקודה מבודדת) הוכחה של כיוון שני. תשתמשו בעובדה ש $d(z, A\backslash\{z\}) = 0$ על מנת לבנות סדרה מבוקשת (במקום העובדה בטענה ש z לא מבודדת).

<u>תרגיל:</u>

1) $A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$.

$$A' = \{0\}$$

$$A'' = \emptyset$$

2) $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \middle| n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

$$A' = \left\{(0,0), \left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(0, \frac{1}{m}\right)\right\}$$

$$A'' = \{(0,0)\}$$

$$A''' = \emptyset$$

<u>תכונות (במ"מ):</u> (לבדוק לבד!).

א) $cl(A) = A \cup A'$.

ב) A סגורה $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

<u>הגדרה:</u> אומרים שתת קבוצה A ב- X היא:

א) **"קבוצת G_δ"** אם A שווה לחיתוך **בן מנייה** של קבוצות פתוחות.

(ז"א $\exists O_n \in top(d), n \in \mathbb{N}: A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$).

ב) **"קבוצת F_σ"** אם A שווה לאיחוד **בן מנייה** של קבוצות סגורות.

(ז"א $\exists P_n \subseteq X: A = \bigcup_{n\in N} P_n$, P_n סגורה $\forall n$).

<u>הערה:</u> $A \in G_\delta \Leftrightarrow A^c \in F_\sigma$

תרגיל:

"בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמ"מ (X,d):

א) כל קבוצה סגורה היא G_δ.

ב) כל קבוצה פתוחה היא F_σ

תרגיל: הוכיחו 2 תכונות חשובות של שלמות:

1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות

(אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלם כתת מ"מ).

2) נניח (Y,d_Y) תת מרחב מטרי של (X,d). אז אם (Y,d_Y) שלם אז Y סגורה ב $X -$.

רמז: תת קבוצה היא סגורה $\Leftrightarrow$ היא "סגורה בנוגע להתכנסות סדרות".

השלמה של מרחב מטרי

הגדרה: **השלמה** של מ"מ (X,d) הוא

שיכון איזומטרי $M \overset{i}{\hookleftarrow} (X,d)$, כאשר M **מ"מ שלם** ומתקיים: $cl(i(X)) = M$.

הערה:

קל לבדוק שהסגור $cl(\mathrm{A})$ של A בכל מרחב הוא תמיד קבוצה סגורה.

(וזה נכון אפילו למרחבים טופולוגיים, נוכיח בהמשך).

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X,d) יש השלמה.

(בהמשך נציג 2 הוכחות (מקוצרות)).

הוכחה ראשונה מבוססת על –

משפט (שיכון למרחב $Banach$): לכל מ"מ (X,d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב $Banach$ (= מ"נ שלם).

<u>הוכחה:</u>

למדנו על מרחב $\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right) \ni Banach$.

$$l_\infty(X) = \left\{f: X \to \mathbb{R} \middle| \text{חסומה } f(X)\right\}$$

$$\|f\|_{sup} \coloneqq \sup_{x\in X}|f(x)|$$

נראה כי ניתן לשכן את X לתוך $l_\infty(X)$:

נבחר $z \in X$. ונגדיר – $\varphi: X \to l_\infty(X)$

$$a \longmapsto \varphi(a) = \hat{a} \qquad \hat{a}: X \to \mathbb{R}\ \boxed{\hat{a}(x) = d(a,x) - d(z,x)}$$

$\hat{a} \in l_\infty(X)$, ז"א $\hat{a}$ פונקציה חסומה כי –

$$|\hat{a}(x)| = |d(a,x) - d(z,x)| \le \underbrace{d(a,z)}_{\text{קבוע}}$$

מ"ל $\boxed{d(a,b) = \left\|\hat{a} - \hat{b}\right\|}$ $\forall a,b \in X:$.

$$\left\|\hat{a} - \hat{b}\right\| = \sup_{x\in X}\left|\left(d(a,x) - d(z,x)\right) - \left(d(b,x) - d(z,x)\right)\right| =$$

$$= \sup_{x\in X}|d(a,x) - d(b,x)| \le d(a,b)$$

מצד שני, אם נציב $x = b$ נקבל –

$$\left\|\hat{a} - \hat{b}\right\| = \sup_{x\in X}|d(a,x) - d(b,x)| \ge \sup|d(a,b) - 0| = d(a,b)$$

לכן הוכחנו את השוויון.

☺

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X,d) יש השלמה.

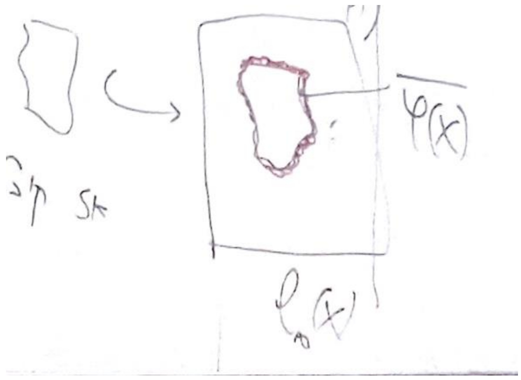
הוכחה ב – 2 דרכים:

<u>דרך א':</u>

הוכחנו: הוכחנו שלכל (X,d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב $Banach$ –

$$\varphi: X \to l_\infty(X)$$

$l_\infty(X)$ פונקציות חסומות וממשיות. ($\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right)$ מרחב $Banach$).



$$\overline{\varphi(x)} \subset l_\infty(X)$$

קבוצה סגורה במרחב שלם ולכן גם שלם.

אז קיבלנו השלמה – $X \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \overline{\varphi(X)} = cl(\varphi(X))$

☺

<u>דרך ב':</u> "דרך סדרות קושי" (הוכחה מקוצרת - רק שלבים בסיסיים). הוכחה מפורטת אפשר למצוא למשל בספר "טופולוגיה קבוצתית",ד. ליבוביץ (האוניברסיטה הפתוחה) חלק א.

הרעיון מאוד דומה להשלמה $\mathbb{Q} \overset{i}{\hookrightarrow} \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ של מרחב רציונליים. כשאנחנו מגדירים מספר ממשי כמחלקת שקילות של סדרות קושי ברציונליים. ראו גם השלמה של $(C[a,b],d_1)$.

<u>שלב א':</u> עבור מ"מ נתון (X,d) נגדיר קבוצה – $\tilde{X} \coloneqq \{(X,d)$ סדרות קושי ב $\}$

נגדיר פסאודו-מטריקה באופן טבעי: לכל זוג של ס"ק $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$

נגדיר – $\tilde{d}(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$

הגבול קיים כי מדובר על סדרות קושי וקל לבדוק ש $d(x_n,y_n)$ ס"ק ב $\mathbb{R}$

(רמז: שימו לב $|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| \le d(x_n,x_m) + d(y_m,y_n)$).

לכן הסדרה $d(x_n,y_n)$ באמת מתכנסת ב $\mathbb{R}$ כי $\mathbb{R}$ שלם.

$(\tilde{X},\tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי.

<u>שלב ב':</u>

<u>טענת עזר</u>: (*מרחב מטרי מושרה ע"י מרחב פסאודו-מטרי*)

נניח $(\tilde{X},\tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי (כללי).

יוצרים ממנו מרחב מטרי מנה שמקבלים באופן הבא.

על מרחב פסאודו-מטרי $(\tilde{X},\tilde{d})$ מגדירים יחס שקילות ("מרחק אפס"):

$$x\Omega y \overset{def}{=} \tilde{d}(x,y)=0$$

נקבל קבוצת מנה: $M \coloneqq \tilde{X}/\Omega = \{[x] \text{ מחלקות שקילות}\}$

$$[x] \coloneqq \{y\in\tilde{X} \mid \tilde{d}(x,y)=0\}$$

נגדיר ב M מרחק טבעי (דרך הנציגים): $\overline{d}\,([x],[y]) = \tilde{d}(x,y)$.

אין תלות בנציגים וזאת באמת מטריקה. אז: $(\mathrm{M},\overline{d})$ מרחב מטרי,

הפונקציה $(\tilde{X},\tilde{d}) \to (\mathrm{M},\overline{d}),\ x \mapsto [x]$ היא על ושומרת מרחקים.

נחזור למשפט -- נפעיל "טענת עזר" על מרחב פסאודו-מטרי שלנו $(\tilde{X},\tilde{d})$ של ס"ק.

נגדיר שיכון: $[\tilde{x}] \longmapsto x \qquad X \overset{i}{\hookrightarrow} M$

כאשר $\tilde{x}\in\tilde{X}$ סדרה קבועה $x,x,x\,...$. אז מתקיימים תנאים הבאים:

i שיכון איזומטרי.

$$d(x,y) = \overline{d}\,([\tilde{x}],[\tilde{y}])$$

$$\overline{\iota(X)} = M$$

(M,ρ) מרחב שלם!. מש"ל

☺

<u>דוגמה 1</u>: $\mathbb{Q}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$.

תזכורת: $X=(\mathbb{Z},d_p)$ מ"מ לא שלם! (היה בתירגול)

למשל עבור $p=3$: $x_n=1+3+3^2+\dots+3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב – X.

דוגמה 2: $(\mathbb{Z},d_p)\hookrightarrow(\overline{\mathbb{Z}},\overline{d_p})$ כאשר: השלמה היא

$$\overline{\mathbb{Z}}=\{p-\text{שלמים אדיים}\}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}b_kp^k\,,b_k\in\underbrace{\{0,1,\dots,p-1\}}_{p\text{ שאריות מודולו}}=\mathbb{Z}_p\right\}$$

שהוא קומפקטי (ולכן גם שלם) ! בעצם זאת חבורה טופולוגית קומפקטית.

הגדרות: מ"מ (X,d) נקרא:

א) **"קומפקטי סדרתית"** אם לכל סדרה ב – X יש תת – סדרה מתכנסת ב – X.

ב) **"קומפקטית"** אם לכל כיסוי פתוח של X יש תת כיסוי סופי.

הערה:

1) נוכיח בהמשך שבמרחבים מטריים ההגדרות הנ"ל הן שקולות.

2) נוכיח גם (בעצם אתם מכירים) את משפט היינה – בורל $(Heine-Borel)$:

התנאים הבאים שקולים –

- $X\subset\mathbb{R}^n$ (כתת מרחב) הוא קומפקטי.
- X חסום וסגור.

תרגיל: הוכיחו שתת קבוצה $X=\{e_n:n\in\{1,2,\dots\}\}$ במרחב הילברט l_2 הוא חסום וסגור

אבל X **לא קומפקטי** כמרחב מטרי.

משפט: כל מ"מ קומפקטי הוא שלם.

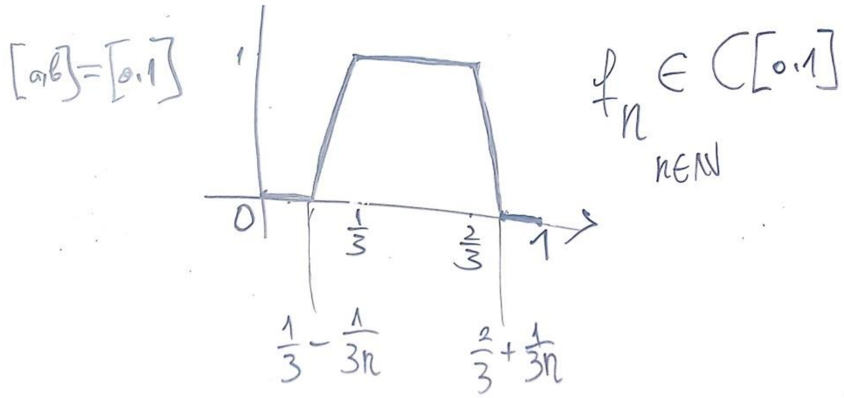
הוכחה:

- לכל ס"ק (סדרת קושי) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ יש ת"ס מתכנסת (הגדרת "קומפקטיות סדרתית").
- אם לס"ק יש ת"ס מתכנסת, אז גם ס"ק נתונה היא מתכנסת (תירגול).

דוגמה 3: $L_1[a,b]\underset{\text{השלמה}}{\hookleftarrow}(C[a,b],d_1)$, כאשר $L_1[a,b]$ פונקציות אינטגרביליות.

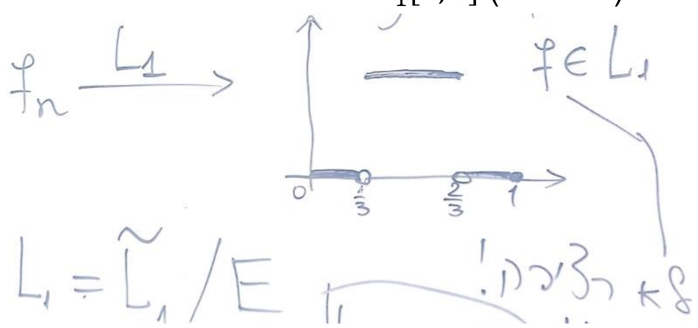
$(C[a,b],d_1)$ לא שלם!

הרצאה 3



(f_n) ס"ק ב - $(C[a,b],d_1)$ אבל לא מתכנסת ב - $(C[a,b],d_1)$.

כן מתכנס במרחב (גדול יותר) $L_1[a,b]$:



כאשר: $E=\left\{f \,\middle|\, \int_a^b |f|dx=0\right\}$.

$\widetilde{L_1}$ מרחב פסאודו-נורמי ! (אומרים גם סמי-נורמי). $L_1[a,b]=\widetilde{L_1}/E$ מרחב המנה והוא מרחב בנך של פונקציות אינטגרביליות על $[a,b]$.

4) $L_2[a,b] \underset{\text{השלמה}}{\hookrightarrow} (C[a,b],d_2)$. מקבלים מרחב הילברט.

<u>הגדרה:</u> A נקראת קבוצה **סגוחה** (clopen) אם $\begin{cases} A \text{ פתוחה} \\ A \text{ סגורה} \end{cases}$

<u>דוגמאות:</u>

1) $A=(0,1)$ פתוחה ולא סגורה ב - $X=\mathbb{R}$.

2) $A=[0,1]$ סגורה ולא פתוחה ב - $X=\mathbb{R}$.

3) $A=[0,1)$ לא סגורה ולא פתוחה ב - $X=\mathbb{R}$.

4) $\emptyset,\mathbb{R}$ סגוחות ב - $\mathbb{R}$.

הערה: לכל מרחב (X,d) – תת קבוצות $\emptyset, X$ תמיד סגוחות (כי $\emptyset = X^c,\ X = \emptyset^c$).

השאלה: מתי יש סגוחות נוספות לא טריוויליות ?

הגדרה: מרחב (X,d) נקרא **קשיר** (*connected*) אם קבוצות סגוחות במרחב הן **רק** $\emptyset, X$.

הגדרה שקולה להיות לא קשיר: אם קיים פירוק $X = X_1 \dot\cup X_2$ כך ש –

$$\begin{cases} X_1 \neq \emptyset\,, X_2 \neq \emptyset \\ X_1, X_2 \in top(d)\ (\text{פתוחות}) \\ X_1 \cap X_2 = \emptyset \end{cases}$$
(שימו לב ש X_1, X_2 סגוחות לא טריוויאליות)

למשל: אם: $\underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}} = [2,4) \cup (5,\infty) \subset \mathbb{R}$

אז X **לא קשיר**. שימו לב ש $(5,\infty)$ **סגוחה** ב X (לא ב $\mathbb{R}$).

דומה עבור $[2,4)$ (למשל 2 נק' פנימית ב $[2,4)$ כי $B_{\frac{1}{2}}(2) = [2,2.5) \subseteq [2,4)$).

עוד דוגמה: מרחב מטרי של רציונליים $\mathbb{Q}$ (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגוחות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$$

$$X_1 = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q}$$

$$X_2 = \mathbb{Q} \cap \left(\sqrt{2}, \infty\right)$$

תרגיל: הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ (עם מטריקה p –אדית) הוא לא קשיר.

לסקרנים:

א. על מרחבים מטריים וטופולוגיה שלהם https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space

ב. הל מרחבים שלמים https://en.wikipedia.org/wiki/Complete_metric_space#Completion

ג. על המרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$, השלמתו ("שלמים p-אדיים")

https://en.wikipedia.org/wiki/P-adic_number

http://www.nt.th-koeln.de/fachgebiete/mathe/knospe/p-adic/