דוגמה 1

נתובנן בפונקציה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1]\\ 2-x & x\in[1,2]\end{cases}$

שימו ♡:

1. $[0,1],[1,2]$ סגורים ב$[0,2]$ (כי למשל $[0,1]=\underbrace{[0,1]}_{\text{closed in }\mathbb{R}}\cap[0,2]$)
2. $[0,2]=[0,1]\cup[1,2]$
3. אם נגדיר $f_1[0,1]\to\mathbb{R}$ ע"י $f_1(x)=x$, זוהי פונקציית ההכלה והיא רציפה.
   $f_2:[1,2]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_2(x)=2-x$ גם כן רציפה. f_2 מתקבלת כצמצום התחום של הפונקציה
   $$\tilde{f}_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad \tilde{f}_2(x)=2-x$$
4. $[0,1]\cap[1,2]=\{1\}$, ו$f_1(1)=f_2(1)=1$

מכאן f רציפה ע"פ משפט.

דוגמה 2

נתבונן ב$(\mathbb{R},T)$ כאשר T היא הטופולוגיה של סורגנפריי. נגדיר פונקציה $f:(\mathbb{R},T)\to\mathbb{Z}$ ע"י $f(x)=[x]$[1]

נגדיר משפחה של פונקציות לכל $n\in\mathbb{Z}$:

$$f_n:[n,n+1)\to\mathbb{Z}$$

$$f_n(x)=n\qquad\forall x\in[n,n+1)$$

f_n רציפה לכל n שכן f_n פונקציה קבועה.

$\{[n,n+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ כיסוי פתוח של $\mathbb{R}$.

הקטעים באוסף הנ"ל לא נחתכים.

נראה שf מוגדרת ע"י האוסף הנ"ל. לכל $x\in\mathbb{R}$ קיים $n_0\in\mathbb{Z}$ יחיד כך ש $[x]=n_0\le x<n_0+1$. מתקיים $f(x)=[x]=f_{n_0}(x)$, לכן f רציפה ע"פ המשפט.

תרגיל

יהי X מ"ט, $f,g:X\to\mathbb{R}$ רציפות.

1. הוכיחו שהקבוצה $A=\{x\in X|f(x)=g(x)\}$ סגורה בX.
2. החליפו את הטופולוגיה על $\mathbb{R}$ ומצאו דוגמה נגדית ל(1).

[1] $[x]$ - עיגול של x לשלם הקרוב ביותר.

פתרון

1. $A=\{x\in X|(f-g)(x)=0\}=(f-g)^{-1}(\{0\})$ סגורה בX, כי $f-g$ רציפה ולכן גם $(f-g)^{-1}$ רציפה, ו$\{0\}$ סגורה ב$\mathbb{R}$.
2. ניקח $f,g:(\mathbb{R},|\cdot|)\to(\mathbb{R},\tau_{\text{trivial}})$ המוגדרות ע"י

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ 1 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad g\equiv 0$$

f,g רציפות כפונקציות לתוך מרחב טריוויאלי, אבל $A=[0,1)$ <u>לא סגורה</u> ב$(\mathbb{R},|\cdot|)$.

הגדרה

יהיו X,Y מ"ט, $f:X\to Y$.
נאמר שf פתוחה(סגורה)אם לכל U פתוחה(סגורה) בX, $f(U)$ פתוחה(סגורה) בY.

דוגמה

בהינתן $f:(X,\tau_{\text{trivial}})\to Y$ <u>על</u>, f פתוחה וסגורה. נובע מכך ש $\left.\begin{matrix}f(\emptyset)=\emptyset\\ f(X)=Y\end{matrix}\right\}$.

תרגיל

תהי $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציית ההטלה על הרכיב הראשון. הוכיחו שp_1 רציפה, פתוחה ולא סגורה.

פתרון

1. p_1 רציפה - הוכחנו בתרגיל השני
2. p_1 פתוחה: תהי U פתוחה ב$\mathbb{R}^2$, צ"ל ש$p_1(U)$ פתוחה ב$\mathbb{R}$. יהי $x\in p_1(U)$. צ"ל שקיים $\epsilon>0$ כך ש$x\in B_{\mathbb{R}}(x,\epsilon)\subseteq p_1(U)$.

$x\in p_1(U)$ ולכן קיים $y\in\mathbb{R}$ כך ש$(x,y)\in U$ $\Leftarrow$ קיים $\epsilon'>0$ כך ש

$$(x,y)\in B_{\mathbb{R}^2}((x,y),\epsilon')\subseteq U$$

נראה ש$x\in B_{\mathbb{R}}(x,\epsilon')\subseteq p(U)$. יהי $z\in B_{\mathbb{R}}(x,\epsilon')$. מתקיים:

$$d((x,y),(z,y))=|x-z|<\epsilon$$

$$\Downarrow$$

$$(z,y)\in B_{\mathbb{R}^2}((x,y),\epsilon')\subseteq U$$

$$\Downarrow$$

$$z \in p_1\left(U\right)$$

וקיבלנו את הדרוש.

3. p_1 לא סגורה.

$$A = \left\{ (x,y) \middle| y = \frac{1}{x} \wedge x > 0 \right\}$$

A סגורה ב$\mathbb{R}^2$(בדקו!). $p_1\left(A\right) = (0,\infty)$ לא סגורה ב$\mathbb{R}$.

קשירות

הגדרה

יהי X מ"ט. נאמר שX <u>לא קשיר</u> אם קיימות קבוצות פתוחות זרות ולא ריקות U,V כך ש$x = U \uplus V$

הגדרות שקולות

1. החליפו "פתוחות" ב"סגורות"
2. X לא קשיר אם קימת בו <u>סגוחה</u>(clogen) לא טריוויאלית.

תרגיל

יהי X מ"ט ו$I = \{0,1\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית. עבור $A \subseteq X$ נגדיר פונקציה $\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$.

הוכיחו: χ_A רציפה $\Leftrightarrow$ χ_A <u>סגוחה</u>.

פתרון

$\Leftarrow$ $A = \chi_A^{-1}\left(\underbrace{\{1\}}_{\text{clogen}}\right)$. χ_A רציפה ולכן A סגוחה.

$\Rightarrow$

$$\chi_A^{-1}\left(\{0\}\right) = A^c \qquad \chi_A^{-1}\left(\{1\}\right) = A \qquad \chi_A^{-1}\left(I\right) = X \qquad \chi_A^{-1}\left(\emptyset\right) = \emptyset$$

כל 4 הקבוצות שהתקבלו בפתוחות, לכן χ_A רצתיפה כי תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה.

מסקנה

X לא קשיר $\Leftrightarrow$ קיימת פונקציה $f:X\to\left(\left\{ 0,1\right\} ,\tau_{\text{disc}}\right)$ רציפה ועל

הסבר

כל פונקציה $f:X\to\left\{ 0,1\right\}$ היא מהצורה χ_{A} עבור $A\subseteq X$. פשוט הגדירו $A=\left\{ x\in X|f\left(X\right)=1\right\}$. כמו כן קל לראות שאם f על אז A אינה טריוויאלית. מהתרגיל הקודם χ_{A} רציפה $\Leftrightarrow$ A סגורה. כלומר:

- קיימת פונקציה $f:X\to\left\{ 0,1\right\}$ רציפה ועל
- שקול ל<u>קיום</u> סגוחה לא טריוויאלית
- שקול לכך שX לא קשיר.

משפט

יהיו X,Y מ"ט, $f:X\to Y$ <u>רציפה</u>. אזי אם X קשיר, $f\left(X\right)$ קשיר(כתת מרחב קשיר).

תרגיל

נתבונן ב$GL_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ כתת מרחב של $\mathbb{R}^{n^{2}}$. האם $GL_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ קשיר?

פתרון

נניח בשלילה ש$GL_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ קשיר. נתבונן בפונקצית הדטרמיננטה <u>הרציפה</u>

$$\det:GL_{n}\left(\mathbb{R}\right)\to\mathbb{R}$$

$$\det\left(GL_{n}\mathbb{R}\right)=\underbrace{\mathbb{R}\backslash\left\{ 0\right\} }_{\text{disconnected}}=\left(-\infty,0\right)\uplus\left(0,\infty\right)$$

בסתירה למשפט הקודם.

סגור(Closure)

הגדרה

יהי X מ"ט, $A\subseteq X$. הסגור של A בx הוא

$$\overline{A}=\bigcap_{\substack{A\subseteq S\\
S\text{ is closed}
}
}$$

(סימון נוסף - $\mathrm{cl}\left(A\right)$)
כלומר: $\overline{A}$ הוא הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את A.

אפיון נוסף

$p\in\mathrm{cl}\left(A\right)\Leftrightarrow$ לכל סביבה U של p מתקיים $U\cap A\neq\emptyset$

תרגיל

יהי $\left(X,d\right)$ מ"מ, $X\subseteq A$ קבוצה כלשהי. הראו ש$p\in\mathrm{cl}\left(A\right)\Leftrightarrow$ קיימת סדרה $\left\{ x_{n}\right\} \subseteq A\rightarrow p$.

הוכחה

$\Rightarrow$ נכון בכל מ"ט(לא נוכיח)

$\Leftarrow$ (נכון במ"מ ולא נכון בהכרח במ"ט כללי)
$p\in\mathrm{cl}\left(A\right)$ ולכן לכל סביבה של p ובפרט, לכל $n\in\mathbb{N}$:

$$B\left(p,\frac{1}{n}\right)\cap A\neq\emptyset$$

לכל $n\in\mathbb{N}$ נבחר $x_{n}\in B\left(p,\frac{1}{n}\right)\cap A$. קל לראות ש$\left\{ x_{n}\right\} \in A\rightarrow p$.

דוגמה נגדית לכיוון $\Leftarrow$ במ"ט

יהי $\left(\mathbb{R},\tau_{\text{co-}\aleph_{0}}\right)$ ותהי $A\subsetneqq\mathbb{R}$ כך ש$\left|A\right|>\aleph_{0}$. מהו $\mathrm{cl}\left(A\right)$?
הסגורות בטופולוגיית $\tau_{\text{co-}\aleph_{0}}$ הן בנות מניה או המרחב כולו. לכן $\mathbb{R}$ הסגורה המינימלית המכילה את A, ומכאן $\mathrm{cl}\left(A\right)=\mathbb{R}$.
תהיח $p\in\mathbb{R}\backslash A$, אזי $p\in\mathrm{cl}\left(A\right)$. נראה שאין סדרה מוכלת ב$A$ השואפת לp.
כזכור, סדרה במ"ט זה מתכנסת $\Leftrightarrow$ היא קבועה לבסוף. אך $p\notin A$ ולכן <u>אין</u> סדרה ש$\left\{ x_{n}\right\} \subseteq A\rightarrow p$.