

בוחן א' בקורס תורת החבורות 88-218 סמסטר א' תשפ"ב

הוראות יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
משך הבוחן: 90 דקות.
סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד (שאינ בו ממש צורך).

בהצלחה!

שאלה 1. (30 נק') בכל סעיף קבעו האם הטענה נכונה או שגויה והוכיחו את קביעתכם:

א. החבורה $U_{18} \times \mathbb{Z}_5$ היא ציקלית.

ב. החבורה $U_{15} \times \mathbb{Z}_8$ היא ציקלית.

שאלה 2. (36 נק') נתונה התמורה $\sigma \in S_9$ $\sigma = (2\ 5\ 4)(1\ 2\ 7)(3\ 6\ 8)(5\ 2\ 6\ 9)$.

א. חשבו את σ^{2021} ואת $o(\sigma)$.

ב. חשבו את סדר המרכז של σ .

(תזכורת: לחבורה G ואיבר $a \in G$, המרכז של a הוא $C_G(a) = \{g \in G \mid ag = ga\}$.)

ג. נתבונן בפעולה של החבורה $\langle \sigma \rangle$ על הקבוצה $\{1, \dots, 9\}$ לפי $\tau * i = \tau(i)$ לכל $\tau \in \langle \sigma \rangle$. כמה מסלולים יש בפעולה? מי האיברים של החבורה שפועלים טריוויאלית (בפרט האם הפעולה נאמנה)? הוכיחו את תשובותיכם.

שאלה 3. (40 נק') בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה פעולה של חבורה על קבוצה. מצאו מיהם המסלולים של הפעולה, וכתבו נציג מפורש לכל מסלול.

א. הפעולה של החבורה D_5 על עצמה על ידי הצמדה.

ב. יהי $n \geq 2$. החבורה S_n פועלת על $X = \{1, \dots, n\}^2 = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ לפי $\sigma * (i, j) = (\sigma(i), \sigma(j))$ לכל $\sigma \in S_n$ ולכל $(i, j) \in X$.