תרגיל מספר 11 מבנים אלגבריים

17 בינואר 2016

1. מצאו $(3x+2)^{-1}$ (כלומר את ההופכי של $3x+2$) בשדה $\mathbb{F}_{11^2} = \mathbb{Z}_{11}[x]/ < x^2+x+4 >$

2. נסתכל במשוואה $X^2+1=0$. למשוואה זאת אין פתרון מעל $\mathbb{Z}_3$ (כלומר, לכל $a \in \mathbb{Z}_3$ מתקיים כי $a^2+1 \neq 0$). מצאו שדה $\mathbb{F}$כך ש

   (א) $\mathbb{Z}_3 \subseteq \mathbb{F}$

   (ב) קיים $a \in \mathbb{F}$ כך ש $a^2+1=0$ (כלומר יש פתרון למשוואה מעל $\mathbb{F}$)

3. יהא $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{Z}_2[x]/ < x^4+x^3+1 >$ שדה. נסתכל על החבורה הכפלית $G = \mathbb{F}_{16} \setminus \{0\}$. הוכח כי $x \in G$ (הפולינום x) הוא יוצר של G. (רמז:לא צריך לחשב את כל החזקות של x אם נעזרים במשפט לגרנג)

4. יהי $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{2^n}$ שדה סופי עם מאפיין 2 כלומר $1+1=0$. הוכיחו כי כל איבר בו הוא ריבוע כלומר $\forall x \in \mathbb{F} \exists y \in \mathbb{F} : \ x = y^2$.
   הדרכה: נגדיר העתקה : $\phi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ ע"י $\phi(x) = x^2$ הראו שהעתקה זו היא חח"ע והסיקו כי ϕ על ולכן הטענה מתקיימת.

5. יהא $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^n}$ שדה עם p^n איברים. הוכיחו כי

$$x^{p^n-1} - 1 = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}^\times} (x - \alpha)$$

   כאשר השיוון הוא שיוון פולינומים.
   הסיקו את משפט וילסון: יהא p מספר ראשוני אי זוגי אזי

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p$$