תרגול כיתה 5 בפיסיקה קלאסית 1

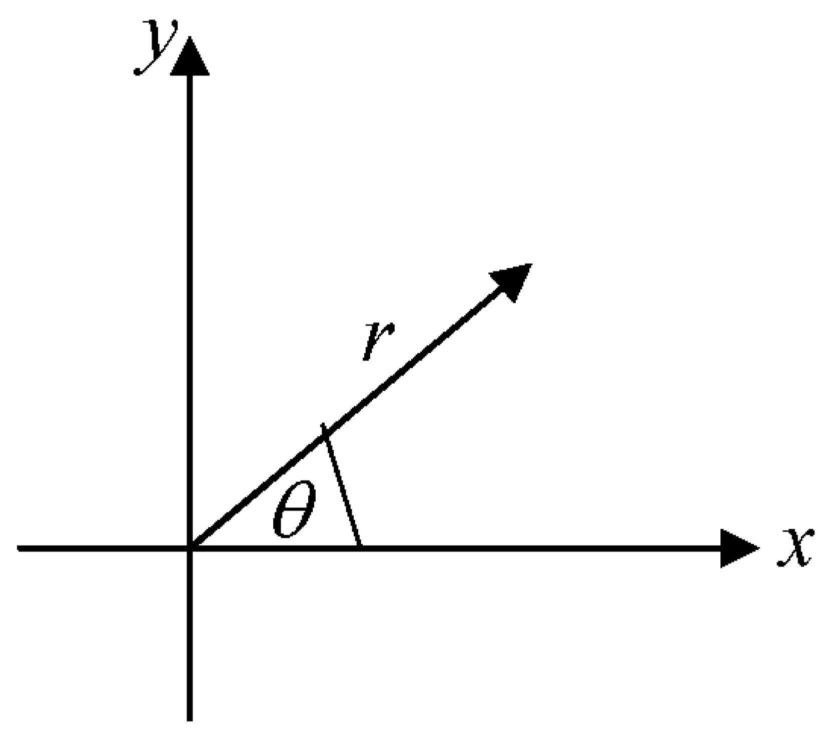
<u>נושאים:</u> חזרה על קורדינטות פולריות , תנועה מעגלית, כוח עילוי וכוח סטוקס, טרנספורמציית גליליי.

<u>תזכורת לחומר תיאורטי</u>

<u>חזרה על קורדינטות פולריות</u>

לחלקיק הנע במישור אם מיקומו נתון ע"י (r,θ) בקורדינטות פולריות אז:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$
$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$$



<u>תנועה מעגלית</u>

בהינתן חלקיק הנע במסלול עקום כלשהו $\vec{r}(t)$ ניתן לפרק את תאוצתו לתאוצה משיקית ותאוצה רדיאלית.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{v})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + \frac{d\hat{v}}{dt}v$$
$$a_T = \frac{dv}{dt} \qquad a_N = \left|\frac{d\hat{v}}{dt}v\right| = \left|\vec{a} - \frac{dv}{dt}\hat{v}\right| = \frac{v^2}{\rho}$$
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} \qquad \hat{n}\cdot\hat{v} = 0$$
$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

ρ הוא רדיוס העקמומיות הרגעי של המסלול.
לתנועה בקו ישר $\rho = \infty$ ולתאוצה יש רכיב משיק בלבד.
במקרה של מסלול מעגלי ברדיוס R, $\rho=R$. נדון כעת בתנועה מעגלית.
מיקום הגוף ניתן ע"י θ. מגדירים מהירות זוויתית:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$
$$v = \omega R$$

מגדירים וקטור של מהירות זוויתית, $\vec{\omega}$, בגודל ω ובכיוון מאונך למישור הסיבוב. מתקיים:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

התאוצה הזוויתית, α, מוגדרת כ:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

התאוצה המשיקית והתאוצה הרדיאלית ניתנות ע"י

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \alpha R$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

התאוצה הכוללת ניתנת ע"י

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

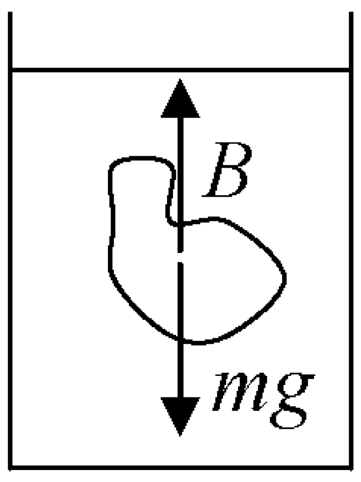
במקרה שבו ω אינו תלוי בזמן, זמן המחזור והתדירות ניתנים ע"י

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \upsilon = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

<u>כוח עילוי וכוח סטוקס</u>

חוק ארכימדס: כאשר גוף טבול כולו או חלקו בזורם (נוזל או גז), הזורם מפעיל על הגוף כוח עילוי B כלפי מעלה בגודל של משקל הזורם שנדחק ע"י הגוף ובנקודה של מרכז המסה של הזורם שנדחק. באופן מתמטי:

$$B = \rho_{\text{fluid}} V g$$



חוק סטוקס: בנוזל צמיג בעל מקדם צמיגות η פועל על כדור מוצק הנע במהירות v כוח המנוגד בכיוונו למהירות בגודל של

$$F = 6\pi\eta R v$$

<u>טרנספורמציית גליליי</u>

בהינתן שתי מערכות ייחוס בהן מיקום חלקיק כפונקציה של הזמן, t, הוא $\vec{r}(t)$ ו $\vec{r}\,'(t)$ כאשר מערכת הייחוס השנייה נעה ביחס לראשונה במהירות קבועה $\vec{v} = v\hat{x}$, המערכות מקושרות ע"י טרנספורמציית גליליי:

$x=x'-vt$
$y=y'$
$z=z'$
$t=t'$

בהינתן שתי מערכות ייחוס O ו-O' בהן מיקום חלקיק כפונקציה של הזמן, t, הוא $\vec{r}(t)$ ו $\vec{r}\,'(t)$ ניתנות המהירות היחסית והתאוצה היחסית של O' ביחס ל-O ע"י:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t) - \vec{r}\,'(t)) = \vec{v}(t) - \vec{v}\,'(t)$$

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}(t) - \vec{r}\,'(t)) = \vec{a}(t) - \vec{a}\,'(t)$$

אם 2 חלקיקים P_1 ו P_2 נעים במהירויות $\vec{v}_1$ ו $\vec{v}_2$ ותאוצות $\vec{a}_1$ ו $\vec{a}_2$ אז הוקטורים:

$$\vec{v}_{P_2|P_1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\vec{a}_{P_2|P_1} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

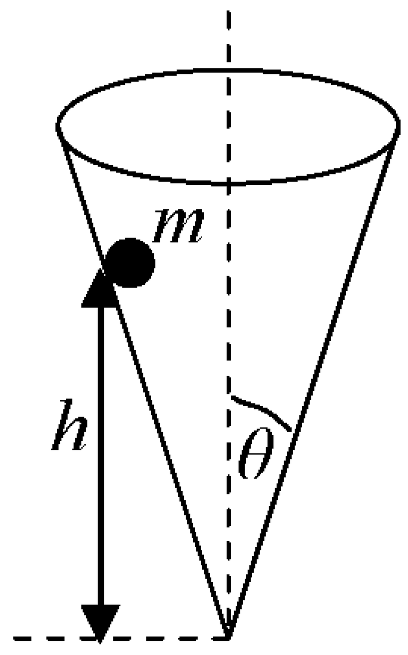
נקראים המהירות והתאוצה היחסיים.

תרגילים

1. תנועתו של חלקיק מתוארת ע"י $r = r_0 e^{\beta t}, \ \omega = \dot{\theta} = \text{const.}$.
   א. חשבו את וקטורי המהירות והתאוצה של החלקיק.
   ב. מהו התנאי שהתאוצה בכיוון $\hat{r}$ תתאפס?

2. בכלי גלילי ברדיוס R מגיע נוזל לא דחיס ולא צמיג במנוחה לגובה h. מסובבים את הכלי סביב מרכזו במהירות זוויתית קבועה ω. מהי צורת פני הנוזל כפונקציה של המרחק מציר הסיבוב?

3. משפך קוני בעל זווית פתיחה θ מסתובב סביב ציר אנכי (ראו שרטוט) במהירות זוויתית קבועה ω. על דופן המשפך מצוי חלקיק שמסתו m, ומקדם החיכוך בינו לבין דופן המשפך היא μ. מצאו באיזה גובה h ימצא החלקיק במנוחה ביחס למשפך.



4. מפילים גולת זכוכית בעלת צפיפות ρ_s ורדיוס R מגובה אפס אל תוך נוזל בעל צמיגות η וצפיפות ρ_l המקיימת $\rho_l < \rho_s$.
   א. מצאו את המהירות במצב שיווי המשקל, v_f (כאשר הכדור לא מאיץ).
   ב. מצאו את מהירות הכדור כפונקציה של הזמן.
   ג. תוך כמה זמן תהיה מהירותו של הכדור $(1-e^{-1})v_f$?

5. מלח נמצא על תורן אונייה נייחת הממוקמת בנקודה $x=0$ ומפיל כדור. באותו הרגע חולף על פניו דייג המאיץ בתאוצה קבועה a בכיוון $\hat{x}$. נתון שברגע $t=0$ (רגע הפלת הכדור) הדייג נמצא ב-$x=0$ ומהירותו v_0 בכיוון $\hat{x}$. מצאו את מיקום, מהירות ותאוצת הכדור במערכת המלח ובזו של הדייג.

6. מיקומו של חלקיק במערכת O נתון ע"י:

$$\vec{r} = (at^2 + bt)\hat{x} + ct^3\hat{y} + d\hat{z}$$

במערכת O' מיקומו של אותו חלקיק נתון ע"י

$$\vec{r}\,' = (a't^2 + b't)\hat{x} + c't^3\hat{y} + d'\hat{z}$$

מצאו את המהירות והתאוצה היחסית של O' ביחס ל O.

1. א. נוסחאות לקורדינטות פולריות:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

נחשב אצלנו:

$$\dot{r} = \beta r_0 e^{\beta t}$$

$$\ddot{r} = \beta^2 r_0 e^{\beta t}$$

$$\theta = \omega t + C$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\ddot{\theta} = 0$$

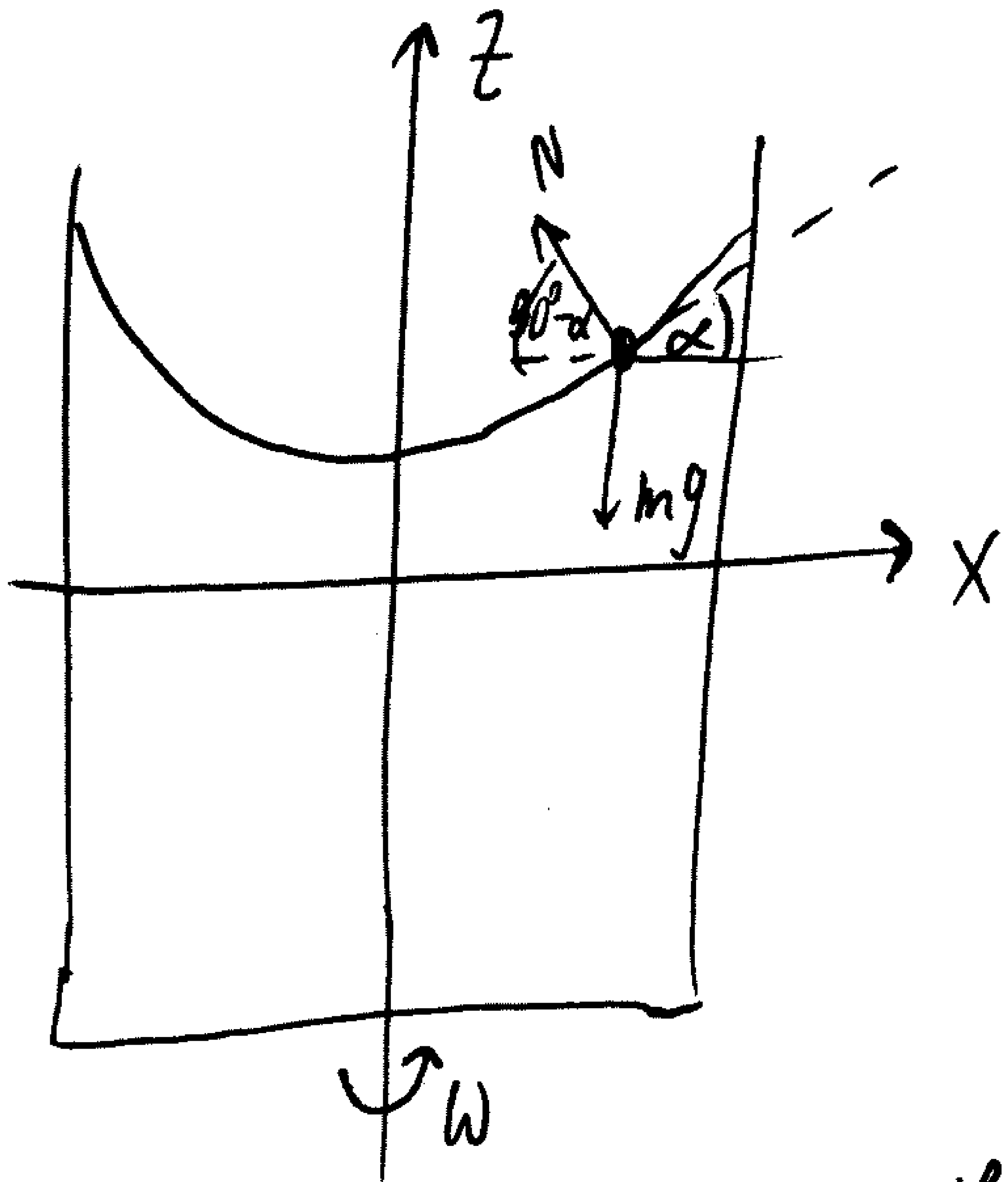
$$\vec{v} = \beta r_0 e^{\beta t}\hat{r} + \omega r_0 e^{\beta t}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\beta^2 r_0 e^{\beta t} - \omega^2 r_0 e^{\beta t})\hat{r} + (2\omega\beta r_0 e^{\beta t})\hat{\theta}$$

ב. רכיב התאוצה בכיוון $\hat{r}$ הוא $\beta^2 r_0 e^{\beta t} - \omega^2 r_0 e^{\beta t}$. אם דורשים שיתאפס,

$$\beta^2 r_0 e^{\beta t} - \omega^2 r_0 e^{\beta t} = 0 \Rightarrow \beta^2 = \omega^2 \Rightarrow \beta = \pm\omega$$

2) נסתכל על אלמנט נוזל קטן.



פני הנוזל מסתדרים בצורה המתאימה

ל- $z(\rho)$ שאנו מחפשים.

משוואת הכוחות לאלמנט הנוזל:

$$\begin{cases} z| \ -mg+N\cos\alpha=0 \\ x| \ -N\sin\alpha=-m\omega^2 x \end{cases}$$

מחלוקת המשוואה השנייה בראשונה מקבלים:

$$\tan\alpha=\frac{\omega^2}{g}x$$

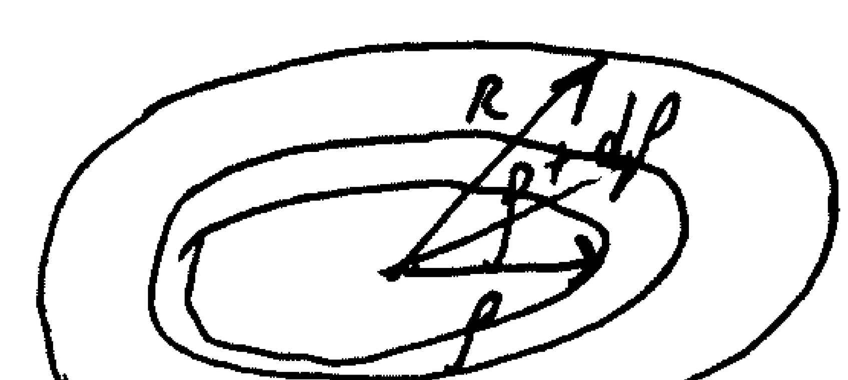
$$\frac{dz}{d\rho}=\frac{\omega^2}{g}\rho$$

$$z=\frac{\omega^2}{2g}\rho^2+C_1$$

נמצא את C_1 ע"י הדרישה שנפח הנוזל יישאר קבוע.

נחלק נוזל לאלמנטים גליליים חלולים בעובי $d\rho$ ובגובה $z(\rho)$.

$$\pi R^2 h=\int_{\rho=0}^{R} z\,2\pi\rho\,d\rho \Rightarrow$$



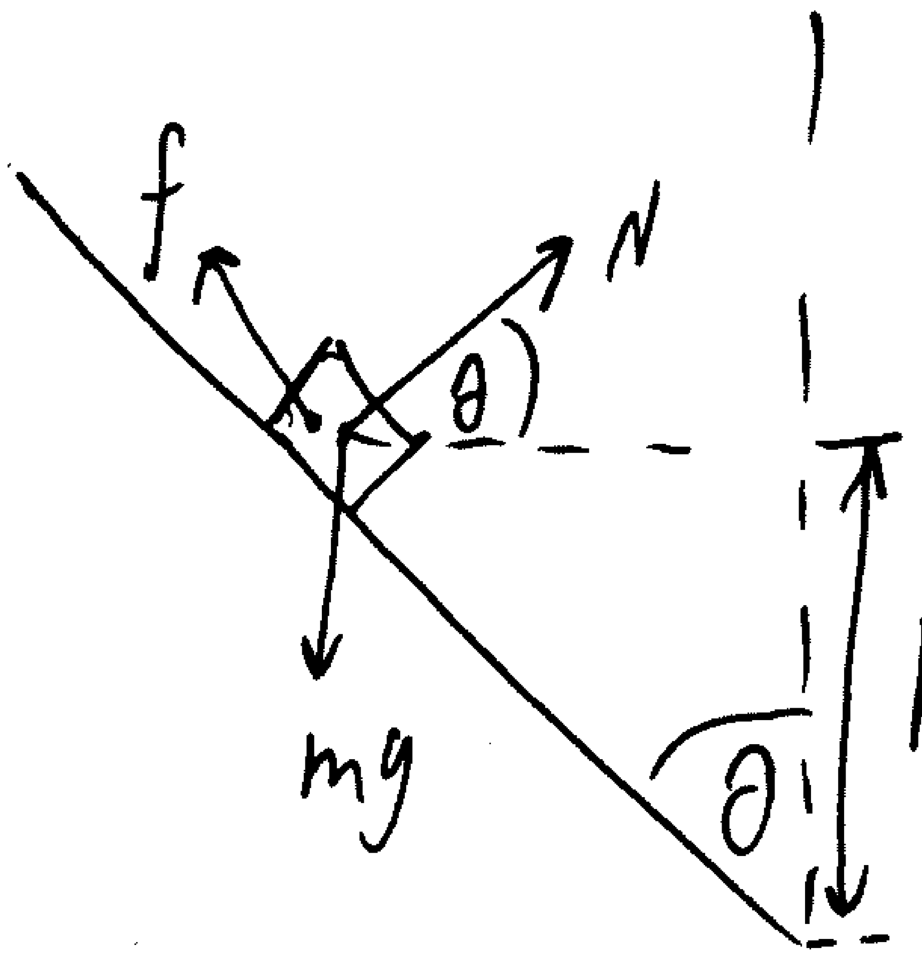
$$\pi R^2 h=\int_{\rho=0}^{R}\left(\frac{\omega^2}{g}\pi\rho^3+2C_1\pi\rho\right)d\rho$$

$$\pi R^2 h=\frac{\omega^2}{g}\pi\frac{R^4}{4}+C_1\pi R^2$$

$$C_1=\frac{\pi R^2 h-\frac{\omega^2}{g}\pi\frac{R^4}{4}}{\pi R^2}=h-\frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

$$z(\rho)=\frac{\omega^2}{2g}\rho^2+h-\frac{\omega^2R^2}{4g}$$

3) נרשום את משוואות התנועה לגוף:



$$\begin{cases} x| \ -f\sin\theta + N\cos\theta = m\omega^2 h\tan\theta \\ y| \ N\sin\theta + f\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

כל עוד מתקיים תנאי: $-\mu \leq \frac{f}{N} \leq \mu$,

הגוף יהיה נייח. מקרי הקצה יתנו לנו את מקרי הקצה ל-h.

$$\frac{f}{N} = \pm\mu \Longrightarrow f = \pm\mu N$$

$$\begin{cases} \mp\mu N\sin\theta + N\cos\theta = m\omega^2 h\tan\theta \\ N\sin\theta \pm \mu N\cos\theta = mg \end{cases}$$

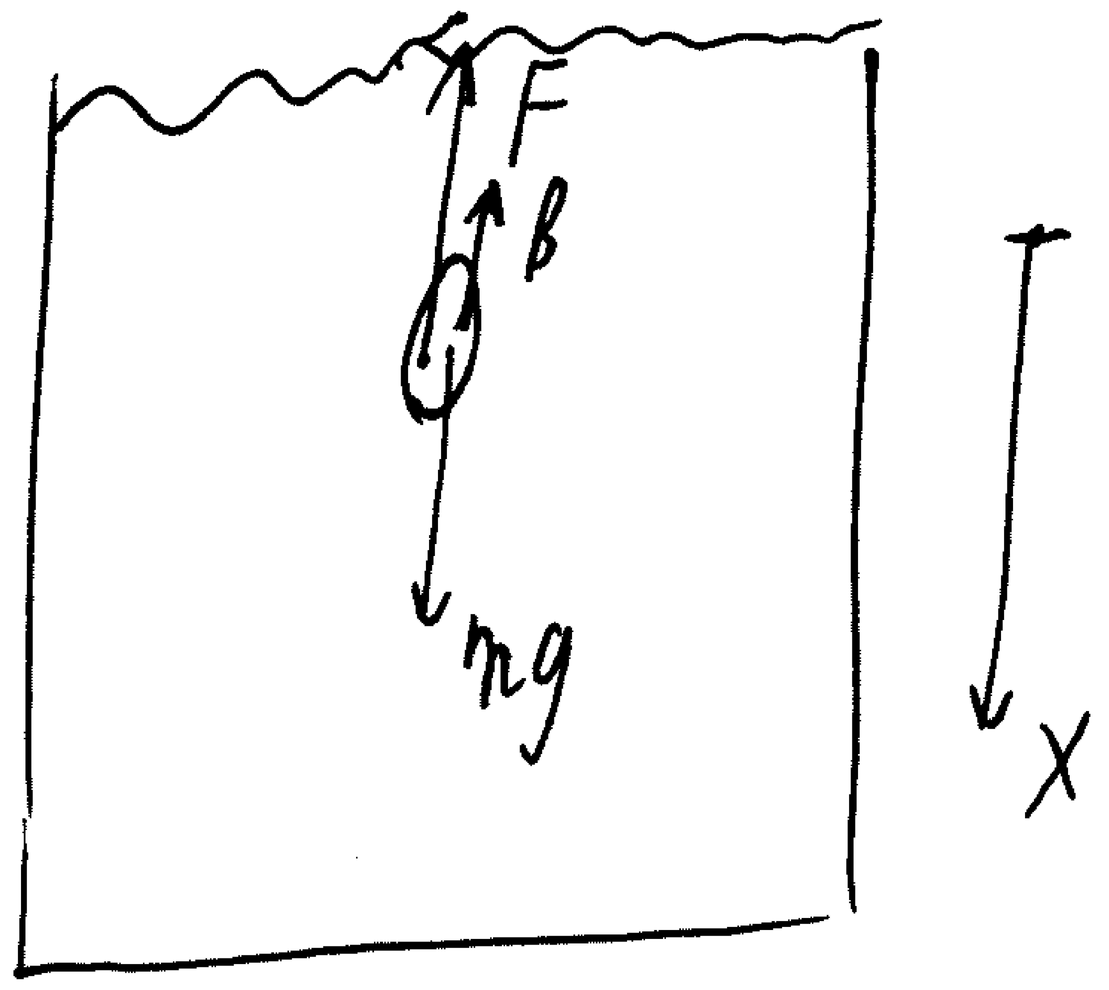
נחלק משוואה ראשונה בשניה ונחלץ את h לקבלת:

$$h = \frac{g}{\omega^2\tan\theta}\left(\frac{\mp\mu\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta \pm \mu\cos\theta}\right) =$$

$$= \frac{g}{\omega^2}\left(\frac{\mp\mu + \cot\theta}{tg\theta \pm \mu}\right)$$

ניתן לראות ש h_{min} מתאים לסימן עליון ו- h_{max} לסימן תחתון.

$$h_{min} \leq h \leq h_{max}$$



4) על הכדור פועלים כח המשיכה, כח העילוי וכח סטוקס.

משוואות התנועה:

$$mg - B - F = ma$$

$$\rho_s \frac{4\pi}{3} R^3 g - \rho_\ell \frac{4\pi}{3} R^3 g - 6\pi\eta R \dot{X} = \rho_s \frac{4\pi}{3} R^3 \ddot{X}$$

א. במצב שיווי המשקל סך הכוחות על הכדור הם אפס.

$$\rho_s \frac{4\pi}{3} R^3 g - \rho_\ell \frac{4\pi}{3} R^3 g - 6\pi\eta R V = 0 \Rightarrow$$

$$V = V_{crit} = \frac{\frac{4\pi}{3} R^3 g (\rho_s - \rho_\ell)}{6\pi\eta R} =$$

$$= \frac{2}{9} R^2 \frac{g}{\eta} (\rho_s - \rho_\ell)$$

ב. $V = \dot{X}$ לכן המשוואה הדיפרנציאלית ל-V היא:

$$\underbrace{+\rho_s \frac{4\pi}{3} R^3}_{A} \dot{V} + \underbrace{\frac{4\pi}{3} R^3 g (\rho_\ell - \rho_s)}_{B} + \underbrace{6\pi\eta R}_{C} V = 0$$

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt}$$

נבצע הפרדת משתנים למשוואה ההומוגנית:

$$A \frac{dV}{dt} + CV = 0 \Longrightarrow A \frac{dV}{V} = -C\,dt \rightarrow \ln V = -\frac{C}{A} t + D$$

$$\Rightarrow V_h = E \cdot e^{-\frac{C}{A} t}$$

~~$\cancel{\cdots = 0}$~~

נוסיף פתרון פרטי: $V_p = V_{crit}$. נציב תנאי התחלה $V(t=0)=0$

ונקבל:

$$V(t) = V_{crit} \left(1 - e^{-\frac{C}{A} t}\right), \quad \frac{C}{A} = \frac{6\pi\eta R}{\rho_s \frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{9\eta}{2\rho_s R^2}$$

ג. כפי שניתן לראות לאחר זמן $t_1 = \frac{A}{C} = \frac{2\rho_s R^2}{9\eta}$ מתקיימת הדרישה.

5) נרשום את מיקום הג"ל:

$$\vec{r}_2(t) = (v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2)\hat{x}$$

מערכת הייחוס של המעלה היא מערכת הייחוס של הקרקע.

במערכת זו ידוע לכדור:

$$\vec{a} = -g\hat{y}$$

$$\vec{v} = -gt\,\hat{y}$$

$$\vec{r} = -\tfrac{1}{2} g t^2\,\hat{y}$$

נקבל את ~~[illegible]~~ גדלים אלו במע' הייחוס של הג"ל:

$$\vec{v}_2(t) = (v_0 + at)\hat{x}$$

$$\vec{a}_2(t) = a\hat{x}$$

לכדור במערכת הייחוס של הג"ל:

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_2 = -a\hat{x} - g\hat{y}$$

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_2 = -(v_0 + at)\hat{x} - (gt)\hat{y}$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_2 = -(v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2)\hat{x} - (\tfrac{1}{2} g t^2)\hat{y}$$

6. מהירות מערכת O' ביחס למערכת O ניתנת בהגדרה ע"י $\frac{d(\vec{r}-\vec{r}\,')}{dt}$.

$$\frac{d(\vec{r}-\vec{r}\,')}{dt}=$$
$$\frac{d}{dt}\Big([(a-a')t^2+(b-b')t]\hat{x}+[(c-c')t^3]\hat{y}+[d-d']\hat{z}\Big)=$$
$$[2(a-a')t+(b-b')]\hat{x}+[3(c-c')t^2]\hat{y}$$

מהירות מערכת O' ביחס למערכת O ניתנת בהגדרה ע"י $\frac{d^2(\vec{r}-\vec{r}\,')}{dt^2}$.

$$\frac{d^2(\vec{r}-\vec{r}\,')}{dt^2}=$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d(\vec{r}-\vec{r}\,')}{dt}\right)=$$
$$\frac{d}{dt}\Big([2(a-a')t+(b-b')]\hat{x}+[3(c-c')t^2]\hat{y}\Big)=$$
$$[2(a-a')]\hat{x}+[6(c-c')t]\hat{y}$$

אנו רואים כי גם המהירות היחסית וגם התאוצה היחסית אינן בלתי תלויות בזמן.