

פונקציות מרוכבות – תרגיל 2

1. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות (אם הם קיימים)

$$z_n = \frac{1+n}{1-2n} + \frac{n-10}{n^2}i \quad \text{א.}$$

$$z_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n \sin\left(\frac{1}{n}\right)i \quad \text{ב.}$$

$$z_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n} + \sqrt[n]{3^n + 4^n}i \quad \text{ג.}$$

$$z_n = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^n \quad \text{ד.}$$

2. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)} \quad \text{א.}$$

$$z \neq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-z^n}{1+z^n} \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(z^3 - i)^n \quad \text{ד.}$$

3. הביעו את הפונקציות הבאות במונחים של z, \bar{z} בלבד ($z = x + iy$):

$$f(z) = x^2 + \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(y - \frac{1}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}\right)i \quad \text{א.}$$

$$f(z) = \frac{2x^2 - 5x + y^2 - 3}{(x - \pi)^2 + y^2} + \frac{(x-1)(y-2)}{x^2 + (y+e)^2}i \quad \text{ב.}$$

4. אומרים שהפונקציה $f(z) \equiv f(x+iy) \equiv u(x,y) + iv(x,y)$ מקיימת את תנאי קושי-רימן (בקצרה CR) בנקודה $z_0 = x_0 + iy_0$ אם מתקיימים שני השוויונות

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array} \right. . \text{ לכל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את כל הנקודות בהן}$$

מתקיים תנאי CR:

א. $f(z) = x^3 + iy^3$

ב. $f(z) = z^2$

ג. $f(z) = z + \operatorname{Re}(z)$

ד. $f(z) = x^3 + y^5$