מבנים דיסקרטיים – תרגיל 1 – פיתרון

שאלה 1

א. נגדיר פעולה $*$ על $\mathbb{N}$ ע"י $a*b=2a-b$. הראו כי $(\mathbb{N},*)$ אינה מאגמה.

פיתרון: $1,3\in\mathbb{N}$ אבל $1*3=2\cdot1-3=-1\notin\mathbb{N}$. לכן $(\mathbb{N},*)$ אינה מאגמה.

ב. נגדיר פעולה $*$ על $\mathbb{Z}$ ע"י $a*b=2a-b$. הראו כי $(\mathbb{Z},*)$ היא מאגמה אך אינה אגודה.

פיתרון: נוכיח סגירות: לכל $a,b\in\mathbb{Z}$ מתקיים $a*b=2a-b\in\mathbb{Z}$.
לכן $(\mathbb{Z},*)$ מאגמה.
לעומת זאת, $*$ לא אסוציאטיבית כי
$(1*1)*0=(2\cdot1-1)*0=1*0=2\cdot1-0=2$ אבל
$1*(1*0)=1*(2\cdot1-0)=1*2=2\cdot1-2=0$
ולכן $(\mathbb{Z},*)$ לא אגודה.

ג. נגדיר פעולה $*$ על $\mathbb{Q}$ ע"י $a*b=6$. הראו כי $(\mathbb{Q},*)$ היא אגודה אך אינה מונויד.

פיתרון: נוכיח סגירות: לכל $a,b\in\mathbb{Q}$ מתקיים $a*b=6\in\mathbb{Q}$, כדרוש.
נוכיח אסוציאטיביות: לכל $a,b,c\in\mathbb{Q}$ מתקיים $a*(b*c)=a*6=6=6*c=(a*b)*c$, כדרוש.
לכן, $(\mathbb{Q},*)$ אגודה.
נוכיח של-$(\mathbb{Q},*)$ אין יחידה: יהי $e\in\mathbb{Q}$. אזי $e*7=6\neq7$ ולכן e לא יחידה, כדרוש.
לכן, $(\mathbb{Q},*)$ לא מונויד.

ד. תהי $X=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|a\geq0\}$. הראו כי $(X,+)$ היא מונויד אך אינה חבורה (הפעולה $+$ היא חיבור וקטורים). מה איבר היחידה של X?

פיתרון: נוכיח סגירות: יהיו $(a,b),(c,d)\in X$. אזי $a\geq0$ ו-$c\geq0$ ולכן $a+c\geq0$. זה אומר ש-$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\in X$, כדרוש.
נוכיח אסוציאטיביות: הפעולה $+$ אסוציאטיבית כי חיבור וקטורים הוא אסוציאטיבי.
נוכיח שקיימת יחידה: האיבר $(0,0)\in X$ הוא איבר יחידה כי לכל $(a,b)\in X$ מתקיים $(a,b)=(a,b)+(0,0)=(0,0)+(a,b)$.
לכן, $(X,+)$ מונויד.
כדי להראות ש-$(X,+)$ לא חבורה מספיק למצוא איבר שאין לו נגדי.[1]
נוכיח של-$(1,0)$ אין נגדי: נניח בשלילה ש-$(a,b)\in X$ נגדי של $(1,0)$, אזי $(0,0)=(1,0)+(a,b)=(1+a,b)$ ולכן $1+a=0$, כלומר $a=-1<0$. אבל היות ו-$(a,b)\in X$ מתקיים $a\geq0$ ולכן קיבלנו סתירה.

ה. תהי $X=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}\middle|0<a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}\right\}$. הראו כי X עם כפל מטריצות היא חבורה. מה היחידה של X?

[1] אם הפעולה של המונויד היא $+$ אומרים נגדי במקום הופכי.

פיתרון: נוכיח <u>סגירות</u>: יהיו $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \in X$. אזי $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{bmatrix}$. היות ו-$a, c > 0$ (כי $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \in X$) אז $ac > 0$ ולכן $\begin{bmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{bmatrix} \in X$, כדרוש.

נוכיח <u>אסוציאטיביות</u>: כפל מטריצות הוא אסוציאטיבי. אין מה להוכיח.

נוכיח <u>שקיימת יחידה</u>: המטריצה $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ שייכת ל-X לפי ההגדרה והיא יחידה ביחס לכפל מטריצות (כלומר לכל מטריצה 2X2 A מתקיים $AI = IA = A$), כדרוש.

נוכיח <u>שלכל איבר ב-X יש הופכי</u>: תהי $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in X$. היות ו-$a > 0$, $\det A = a^2 \neq 0$ ולכן אפשר להגדיר $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & -b/a^2 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$. $a^{-1} > 0$ כי $a > 0$ ולכן $B \in X$. מאלגברה ליניארית אנחנו יודעים ש-$AB = BA = I$ ולכן B הופכי של A. מש"ל.

שאלה 2

בכל סעיף נתונה קבוצה X ופעולה בינארית $*$ על X. עליכם לבצע:

- קבעו האם $(X,*)$ חבורה \ מונויד \ אגודה \ מאגמה \ אף אחד מהקודמים. [יש להוכיח את האפשרות החזקה ביותר.]
- קבעו האם הפעולה $*$ חילופית (=אבלית).
- אם מדובר בחבורה או מונויד, מצאו את היחידה.
- אם מדובר באגודה, מצאו את כל היחידות השמאליות ואת כל היחידות הימניות (יתכן שאין).

סעיפים:

א. $X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, הפעולה $*$ היא כפל מטריצות.

פיתרון: $(X,*)$ אגודה לא חילופית.

נבדוק <u>סגירות</u>: תהיינה $\begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in X$. אזי

$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab' + bc' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in X$ ולכן סגירות מתקיימת.

נבדוק <u>אסוציאטיביות</u>: כפל מטריצות הוא אסוציאטיבי ולכן אסוציאטיביות מתקיימת.

נראה <u>שאין יחידות שמאלית ואין יחידות ימניות</u>. בפרט, אין יחידה ולכן $(X,*)$ לא מונויד:

נניח בשלילה ש-$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in X$ יחידה שמאלית. אזי צריך להתקיים

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ אבל זה אומר ש-$0 = 1$, כלומר קיבלנו סתירה. (השוויון השמאלי נובע מההנחה שמדובר ביחידה שמאלית.)

מוכיחים שאין יחידה ימנית באותו אופן.

נראה ש-<u>$(X,*)$ לא חילופית</u>: נגדיר $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. אזי

$A * B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B * A$.

ב. X היא אוסף הפונקציות מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ והפעולה $*$ היא $f * g = f \circ g \circ g$.

פיתרון: $(X,*)$ מאגמה לא חילופית.
נבדוק סגירות: תהיינה $f, g \in X$, אזי f ו-g פונקציות מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ ולכן גם $f * g = f \circ g \circ g$ פונקציה מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ ולכן ב-X.
נראה שאסוציאטיביות לא מתקיימת: נגדיר $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = x, \;\; g(x) = 2x, \;\; h(x) = x + 1$ ונסמן $a = (f * g) * h$ ו-$b = f * (g * h)$.
אזי:

$$(f * g)(x) = f(g(g(x))) = f(g(2x)) = f(4x) = 4x$$
$$a(x) = (f * g)\left(h(h(x))\right) = (f * g)(h(x+1)) = (f * g)(x+2) = 4x + 8$$
$$(g * h)(x) = g(h(h(x))) = g(h(x+1)) = g(x+2) = 2(x+2) = 2x + 4$$
$$b(x) = f((g * h)(g * h)(x)) = f((g * h)(2x+4)) = f(2(2x+4)+4) = 4x + 12$$

לכן, $a(0) = 8 \neq 12 = b(0)$ ונובע ש-$(f * g) * h = a \neq b = f * (g * h)$.
נראה ש-$(X,*)$ לא חילופית: אם נגדיר f, g כמו מקודם, אז $(f * g)(x) = 4x$ (חישבנו כבר) ו-$(g * f)(x) = g(f(f(x))) = g(f(x)) = g(x) = 2x$. לכן, $f * g \neq g * f$.

ג. $X = \mathbb{N}$ והפעולה $*$ מוגדרת ע"י $a * b = \max\{a, b\}$.

פיתרון: $(X,*) = (\mathbb{N}, max)$ מונויד חילופי עם יחידה $e = 1$.
נבדוק סגירות: אם $n, m \in \mathbb{N}$ אז גם $n * m = \max\{n, m\} \in \mathbb{N}$ ולכן סגירות מתקיימת.
נבדוק אסוציאטיביות: יהיו $a, b, c \in \mathbb{N}$. אזי $a * (b * c) = \max\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{a, b, c\} = \max\{\max\{a, b\}, c\} = (a * b) * c$, לכן סגירות מתקיימת.
נראה שקיימת יחידה: היחידה של $(X,*)$ היא $e = 1$. באמת, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n \geq 1$ ולכן $e * n = n * e = \max\{n, e\} = n$, כדרוש.
נראה שקיים איבר ללא הופכי ולכן $(X,*)$ לא חבורה: לכל $y \in \mathbb{N}$ מתקיים $2 * x = \max\{2, x\} \geq 2$.
לכן, $e = 1 \neq 2 * x$ לכל $x \in X$ וזה אומר ש-2 לא הפיך מימין (ובפרט לא הפיך).
נראה ש-$(X,*)$ חילופית: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$, אזי $m * n = \max\{m, n\} = \max\{n, m\} = n * m$, כדרוש.

ד. $X = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, הפעולה $*$ היא כפל מטריצות.

פיתרון: $(X,*)$ אגודה עם יחידות ימניות $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
נסמן $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ונבנה טבלת כפל ל-$(X,*)$ [את הערכים בטבלה ניתן למצוא על ידי חישוב]:

*	O	A	B
O	O	O	O
A	O	A	A
B	O	B	B

מהטבלה אפשר לראות שסגירות מתקיימת ושיש שתי יחידות ימניות – A ו-B. בנוסף, $*$ לא חילופית כי $A * B \neq B * A$ [כפי שרואים בטבלה].

הפעולה $*$ אסוציטיבית כי כפל מטריצות אסוציאטיבי.
$(X,*)$ אינה מונויד כי יש יותר מיחידה ימנית אחת וזה בלתי אפשרי במונויד.