שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

תרגיל בית מספר 5

תאריך הגשה:16.05

שאלה 1

שאלה זו מציגה את הוכחתו של פרופ' פורסטנברג לקיומם של אינסוף מספרים ראשוניים באמצעות הטופולוגיה הפרו סופית. **מותר ורצוי להשתמש במה שהוכחנו בתרגול לגבי טופולוגיה זו.**

כזכור, סדרה חשבונית דו צדדית היא קבוצה $S=a+d\mathbb{Z}=\{a+dk \mid k\in\mathbb{Z}\}$ $(a\in\mathbb{Z},\quad d\in\mathbb{N})$.

נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה הפרו סופית בדרך הבאה:

$O\in\tau_{pro}$ אם"ם לכל $x\in O$ יש סדרה חשבונית דו צדדית $S=x+d\mathbb{Z}$ כך ש- $x\in S\subseteq O$.

1. הוכיחו כי $\bigcup p\mathbb{Z}=\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ (האיחוד הוא על כל המספרים הראשוניים).
2. הוכיחו כי $\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ אינה סגורה.
3. הסיקו כי ישנם אינסוף מספרים ראשוניים.

שאלה 2

נסמן ב $\Re_l$ את המספריים הממשיים עם הטופולוגיה T הבאה:

קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קבוצות מהצורה $[a,b)$ (זהו הישר של סורגנפריי).

א. הוכיחו כי T אכן טופולוגיה.
ב. הוכיחו שהטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$, שנסמנה להלן ב τ (המתקבלת ע"י המטריקה הרגילה), מקיימת $\tau\subset T$ (הכלה <u>אמיתית</u>!).
ג. הוכיחו שהסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ מתכנסת בטופולוגיה של סורגנפריי.

שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

<u>שאלה 3</u>

יהיה X מ"ט. $A\subseteq X$ תת מרחב, אזי $S\subseteq A$ סגורה ב- A $\Leftrightarrow$ קיימת $Q\subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S=Q\bigcap A$.

<u>תרגיל 4</u>

תהי X קבוצה לא ריקה. האם המרחב $\left(X,\tau_{cof}\right)$ מטריזבילי?

<u>שאלה 5</u>

הוכיחו:

א. כל פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי לכל מרחב טופולוגי אחר – הינה רציפה .
ב. כל פונקציה ממרחב טופולוגי כלשהו למרחב הטופולוגי הטריוויאלי - הינה רציפה.
ג. תהי $f:\left(X,\tau_1\right)\to\left(Y,\tau_2\right)$ רציפה. נניח כי $\tau_3\subseteq\tau_2$ וגם $\tau_1\subseteq\tau_4$. הוכיחו כי $f:\left(X,\tau_1\right)\to\left(Y,\tau_3\right)$ וגם $f:\left(X,\tau_4\right)\to\left(Y,\tau_2\right)$ רציפות.

<u>שאלת בונוס</u>

יהי Y מ"ט. $Z\subseteq Y$ הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. Z תת קבוצה סגורה של Y.

ב. קיים כיסוי פתוח $\left\{U_i\right\}_{i\in I}$ של Y כך ש $Z\cap U_i$ סגורה ב U_i לכל $i\in I$.

בהצלחה!