פתרון תרגיל בית 2

שאלה 1

פתרו בעזרת שיטת הפרדת המשתנים את המשוואות הבאות:

א. $2ydx-xdy=0$.

ב. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^{y}}$.

ג. $y'=\cos^2 x\cos^2 2y$.

ד. $(xy+x)dx=\left(x^2y^2+x^2+y^2+1\right)dy$.

פתרון שאלה 1

סעיף א

$$2ydx-xdy=0\Rightarrow 2ydx=xdy\Rightarrow \frac{1}{x}dx=\frac{1}{2y}dy\Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}\ln(cy)\Rightarrow y=\frac{x^2}{c}.$$

סעיף ב

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^{y}}\Rightarrow \left(y+e^{y}\right)dy=\left(x-e^{-x}\right)dx\Rightarrow \frac{y^2}{2}+e^{y}=\frac{x^2}{2}+e^{-x}+c.$$

סעיף ג

$$y'=\cos^2 x\cos^2 2y\Rightarrow \frac{dy}{\cos^2 2y}=\cos^2 xdx\Rightarrow \frac{1}{2}\tan 2y=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+c.$$

סעיף ד

$$(xy+x)dx=\left(x^2y^2+x^2+y^2+1\right)dy\Rightarrow x(y+1)dx=\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)dy\Rightarrow \frac{xdx}{x^2+1}=\frac{\left(y^2+1\right)dy}{y+1}$$

נחשב $\int\frac{x}{x^2+1}dx$. נציב $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$.

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx=\int\frac{1}{2(t+1)}dt=\frac{1}{2}\ln|t+1|=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right).$$

נחשב $\int\frac{\left(y^2+1\right)dy}{y+1}$.

$$\frac{y^2+1}{y+1}=\frac{(y+1)^2-2(y+1)+2}{y+1}=y+1-2+\frac{2}{y+1}=y-1+\frac{2}{y+1}$$

$$\int\frac{\left(y^2+1\right)dy}{y+1}=\int\left(y-1+\frac{2}{y+1}\right)dy=\frac{y^2}{2}-y+2\ln|y+1|.$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)=\frac{y^2}{2}-y+2\ln|y+1|+c.$$

שאלה 2

פתרו את המשוואות ההומוגניות הבאות:

א. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}$.

ב. $\left(x^2+3xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$.

ג. $2x^3y'=y\left(y^2+3x^2\right)$.

ד. $y'=\frac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

נציב $y=ux$ ואז $y'=u'x+u$

$$\frac{2udu}{1+u^2}=\frac{dx}{x}\Leftarrow u'x=\frac{1+u^2}{2u}\Leftarrow u'x+u=\frac{1+3u^2}{2u}\Leftarrow u'x+u=\frac{x^2+3u^2x^2}{2x\cdot ux}$$

$$1+\frac{y^2}{x^2}=cx\Leftarrow \ln\left(1+u^2\right)=\ln\left(cx\right)$$

<u>סעיף ב</u>

נציב $y=ux$ ואז $y'=u'x+u$

$$y'=\frac{x^2+3xy+y^2}{x^2}$$

$$u'x=1+2u+u^2\Leftarrow u'x+u=1+3u+u^2\Leftarrow u'x+u=\frac{x^2+3x\cdot ux+u^2x^2}{x^2}$$

$$-\frac{x}{x+y}=\ln cx\Leftarrow -\frac{1}{1+\frac{y}{x}}=\ln cx\Leftarrow -\frac{1}{1+u}=\ln cx\Leftarrow \frac{du}{\left(1+u\right)^2}=\frac{dx}{x}$$

<u>סעיף ג</u>

נציב $y=ux$ ואז $y'=u'x+u$

$$2x^3y'=y\left(y^2+3x^2\right)$$

$$u'x=\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u\Leftarrow u'x+u=\frac{1}{2}u^3+\frac{3}{2}u\Leftarrow u'x+u=\frac{u^3x^3+3ux\cdot x^2}{2x^3}\Leftarrow y'=\frac{y^3+3yx^2}{2x^3}$$

$$\frac{2du}{u^3+u}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{2}{u\cdot\left(u^2+1\right)}=\frac{2}{u}-\frac{2u}{u^2+1}$$

$$\int\frac{2du}{u^3+u}=\int\frac{2du}{u}-\int\frac{2udu}{u^2+1}=\ln u^2-\ln\left(u^2+1\right)=\ln\frac{u^2}{u^2+1}$$

$$.\frac{y^2}{y^2+x^2}=cx\Leftarrow \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y^2}{x^2}+1}=cx\Leftarrow \ln\frac{u^2}{u^2+1}=\ln cx\Leftarrow \int\frac{2du}{u^3+u}=\int\frac{dx}{x}$$

<u>סעיף ד</u>

$$y'=\frac{\left(1+y\right)^2}{x\left(y+1\right)-x^2}$$

נציב $t=1+y\Rightarrow t'=y'$

$$.t'=\frac{t^2}{xt-x^2}$$

נציב $t=ux$ ואז $t'=u'x+u$

$$\frac{\left(u-1\right)du}{u}=\frac{dx}{x}\Leftarrow u'x=\frac{u}{u-1}\Leftarrow u'x+u=\frac{u^2}{u-1}\Leftarrow u'x+u=\frac{u^2x^2}{x\cdot ux-x^2}$$

$$\frac{e^u}{u}=cx\Leftarrow \ln\frac{e^u}{u}=\ln cx\Leftarrow u-\ln u=\ln cx\Leftarrow \left(1-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x}$$

הצבנו $t=ux$, $t=1+y$ ז"א $u=\frac{1+y}{x}$.

הפתרון הוא $\frac{xe^{\frac{1+y}{x}}}{1+y}=cx$.

<u>שאלה 3</u>

פתור את המשוואות המדויקות הבאות:

הערה: בחלק מהסעיפים יש למצוא גורם אינטגרציוני כדי לקבל משוואה מדויקת.

א. $(3+y+2y^2\sin^2 x)dx+(x+2xy-y\sin(2x))dy=0$.

ב. $(6x+y^2)dx+y(2x-3y)dy=0$.

ג. $(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$. פתור בדרך נוספת ובדוק שהתקבלה תשובה זהה.

ד. $(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

הערה: כל המשוואות מהצורה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

נשתמש בסימון $M(x,y),N(x,y)$ כדי לקצר את הרישום בפתרון.

<u>סעיף א</u>

נבדוק תחילה שהמשוואה מדויקת:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+4y\sin^2 x,\frac{\partial N}{\partial x}=1+2y-2y\cos 2x .$$

נשים לב: $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.

$1+2y-2y\cos 2x=1+2y-2y(1-2\sin^2 x)=1+4y\sin^2 x$ והמשוואה מדויקת.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \quad .$$

$$u(x,y)=\int(3+y+2y^2\sin^2 x)dx=\int(3+y+y^2-y^2\cos 2x)dx=3x+yx+y^2x-\frac{y^2\sin 2x}{2}+c(y)$$

ואז מצד אחד $\frac{\partial u}{\partial y}=x+2yx-y\sin 2x+c'(y)$ ומצד שני $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$.

נקבל את המשוואה $x+2yx-y\sin 2x+c'(y)=x+2xy-y\sin 2x \Leftarrow c'(y)=0 \Leftarrow c(y)=c$

פתרון המשוואה $3x+yx+y^2x-\frac{y^2\sin 2x}{2}=c$.

<u>סעיף ב</u>

נבדוק תחילה שהמשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y,\frac{\partial N}{\partial x}=2y$ והמשוואה מדויקת.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \quad .$$

$u(x,y)=\int(6x+y^2)dx=3x^2+y^2x+c(y)$ ואז מצד אחד $\frac{\partial u}{\partial y}=2yx+c'(y)$ ומצד שני

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y) .$$

נקבל את המשוואה $2yx+c'(y)=2yx-3y^2 \Leftarrow c'(y)=-3y^2 \Leftarrow c(y)=-y^3$

פתרון המשוואה $3x^2+y^2x-y^3=c$.

<u>סעיף ג</u>

נבדוק תחילה שהמשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x+2y, \frac{\partial N}{\partial x}=2x+y$ והמשוואה לא מדויקת.

יש למצוא פונקציה $\mu(x,y)$ כך שהמשוואה $\mu(x,y)(3xy+y^2)dx+\mu(x,y)(x^2+xy)dy=0$ תהייה מדויקת.

$\mu'_y(3xy+y^2)+\mu(3x+2y)=\mu'_x(x^2+xy)+\mu(2x+y) \Rightarrow \mu'_y(3xy+y^2)+\mu(x+y)=\mu'_x(x^2+xy)$

$\mu'_y(3xy+y^2)+\mu(x+y)=\mu'_x x(x+y)$. אם $\mu'_y=0$ נקבל $\mu(x+y)=\mu'_x x(x+y)$.

$\mu=x\mu'_x \Rightarrow \mu=x$.

נכפיל בגורם האינטגרציוני ונקבל את המשוואה $(3x^2y+xy^2)dx+(x^3+x^2y)dy=0$.

נבדוק שאכן המשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2xy, \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2+2xy$ והמשוואה מדויקת.

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$.

$u(x,y)=\int(3x^2y+xy^2)dx=x^3y+\frac{x^2y^2}{2}+c(y)$ ואז מצד אחד $\frac{\partial u}{\partial y}=x^3+x^2y+c'(y)$ ומצד שני $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)=x^3+x^2y$.

נקבל את המשוואה $x^3+x^2y+c'(y)=x^3+x^2y \Rightarrow c'(y)=0 \Rightarrow c(y)=c$

פתרון המשוואה $x^3y+\frac{x^2y^2}{2}=c$.

__סעיף ג דרך נוספת__

$$(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0 \Rightarrow (x^2+xy)dy=(-3xy-y^2)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-3xy-y^2}{x^2+xy} \Rightarrow y'=\frac{-3xy-y^2}{x^2+xy}$$

קיבלנו משוואה הומוגנית. נציב $y=ux \Rightarrow y'=u'x+u$.

$$u'x+u=\frac{-3ux^2-u^2x^2}{x^2+ux^2} \Rightarrow u'x=\frac{-3u-u^2}{1+u}-u \Rightarrow u'x=\frac{-4u-2u^2}{1+u} \Rightarrow \frac{1+u}{-4u-2u^2}du=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{4+4u}{4u+2u^2}du=\frac{-4dx}{x} \Rightarrow \ln\left|4u+2u^2\right|=-4\ln x+\ln c \Rightarrow 4u+2u^2=\frac{c}{x^4} \Rightarrow \frac{4y}{x}+\frac{2y^2}{x^2}=\frac{c}{x^4}$$

סה"כ נקבל $4x^3y+2x^2y^2=c$. נציב קבוע $c=4c_1$ ונקבל $x^3y+\frac{x^2y^2}{2}=c_1$ כמו התשובה שהתקבלה כאשר פתרנו בעזרת גורם אינטגרציוני ומשוואה מדוייקת.

__סעיף ד__

$$(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$$

נבדוק תחילה שהמשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2x+3y^2, \frac{\partial N}{\partial x}=2x$ והמשוואה לא מדויקת.

יש למצוא פונקציה $\mu(x,y)$ כך שהמשוואה

$\mu(x,y)(3x^2y+2xy+y^3)dx+\mu(x,y)(x^2+y^2)dy=0$ תהייה מדויקת.

$$\mu'_y\left(3x^2y+2xy+y^3\right)+\mu\left(3x^2+2x+3y^2\right)=\mu'_x\left(x^2+y^2\right)+2x\mu$$

$$\mu'_y\left(3x^2y+2xy+y^3\right)+\mu\left(3x^2+3y^2\right)=\mu'_x\left(x^2+y^2\right)$$

$\mu'_y\left(3x^2y+2xy+y^3\right)+3\mu\left(x^2+y^2\right)=\mu'_x\left(x^2+y^2\right)$. אם $\mu'_y=0$ נקבל

$3\mu=\mu'_x \Leftarrow \mu=e^{3x}$.

נכפיל בגורם האינטגרציוני ונקבל את המשוואה $e^{3x}\left(3x^2y+2xy+y^3\right)dx+e^{3x}\left(x^2+y^2\right)dy=0$.

נבדוק שאכן המשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2e^{3x}+2xe^{3x}+3y^2e^{3x}, \frac{\partial N}{\partial x}=3e^{3x}\left(x^2+y^2\right)+2xe^{3x}$ והמשוואה מדויקת.

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$.

ואז מצד אחד $u(x,y)=\int 3x^2ye^{3x}+2xye^{3x}+y^3e^{3x}dx=x^2ye^{3x}+\frac{y^3e^{3x}}{3}+c(y)$

ומצד שני $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^{3x}+y^2e^{3x}+c'(y)$ $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)=e^{3x}\left(x^2+y^2\right)$.

נקבל את המשוואה $x^2e^{3x}+y^2e^{3x}+c'(y)=e^{3x}\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow c'(y)=0 \Rightarrow c(y)=c$

פתרון המשוואה $x^2ye^{3x}+\frac{y^3e^{3x}}{3}=c$.