פתרון תרגיל בית 3 - תורת גלואה
סמסטר א', תשע"ז

שאלה 1. הוכיחו שהפולינום $p(x)=x^3+9x+12\in\mathbb{Q}[x]$ הוא אי-פריק. נניח θ הוא שורש של $p(x)$. חשב ואת ההופכי של $\theta+1$ ב $\mathbb{Q}[\theta]$.

פתרון. הפולינום אי פריק לפי איזנשטין (עבור $p=3$) והלמה של גאוס. נחפש הופכי של $x+1$ בחוג המנה בעזרת אלגוריתם אוקלידס המוכלל. ע"י חילוק ארוך רואים: $p(x)-(1+x)(x^2-x+10)=2$ כלומר $\frac{1}{2}p(x)-\frac{1}{2}(1+x)(x^2-x+10)=1$ ולכן ההופכי הוא $-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-5$. מה שאומר ש $(1+\theta)^{-1}=-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{2}\theta+5$.

שאלה 2. חשבו את:

1. $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},i\right]:\mathbb{Q}\right]$
2. $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}\right]$

פתרון. 1. לפי כפליות המימד $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]\colon\mathbb{Q}\right]=\underbrace{\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]\colon\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\right]}_{\leq 2}\underbrace{\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\colon\mathbb{Q}\right]}_{=2}$.
$\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]\colon\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\right]\leq 2$ כי x^2+1 מתאפס ע"י i, אך ברור ש $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]\colon\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\right]\neq 1$ כי זה אומר שהשדות שווים ובפרט $i\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\subseteq\mathbb{R}$ מה שאיננו נכון.
ולכן $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]\colon\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\right]=2$ ו $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]\colon\mathbb{Q}\right]=4$.

2. לפי כפליות המימד $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}\right]=\underbrace{\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}[\sqrt{3}]\right]}_{\leq 2}\underbrace{\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}\right]}_{=2}\leq 4$.
$\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}[\sqrt{3}]\right]\leq 2$ כי x^2-2 מתאפס ב $\sqrt{2}$.
אם בשלילה $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}[\sqrt{3}]\right]=1$ אז $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ כלומר ש $\sqrt{2}=a+b\sqrt{3}$ עבור איזשהם $a,b\in\mathbb{Q}$.
נחשב $2=\sqrt{2}^2=a^2-2ab\sqrt{3}+3b^2$ ואם נעביר אגפים נקבל ש $\sqrt{3}=$

$\frac{a^2+3b^2-2}{2ab} \in \mathbb{Q}$ וזו סתירה. (חסר פה את המקרים ש $a=0$ או $b=0$ - השלימו אותם!).
ולכן $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}[\sqrt{3}]\right]=2$ ו $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}\right]=4$.

שאלה 3. מצאו את הפולינום המינימלי של:

1. $i+\sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}$. (טיפ: $\mathbb{Q}[i+\sqrt{2}]\subseteq\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]$).
2. $i+\sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}[i]$.
3. $\sqrt[3]{7}$ מעל $\mathbb{Q}$.
4. $\sqrt[3]{7}$ מעל $\mathbb{Q}\left[\sqrt{7}\right]$ (רמז: שיקולי מימד).

פתרון. 1. נחשב

$$\left(i+\sqrt{2}\right)^2 = 1+2\sqrt{2}i$$
$$\left(i+\sqrt{2}\right)^4 = -7+4\sqrt{2}i$$

ולכן אפשר לראות $\left(i+\sqrt{2}\right)^4-2\left(i+\sqrt{2}\right)^2+9=0$ ולכן מאפס את הפולינום $x^4-2x^2+9\in\mathbb{Q}[x]$.
אפשר להראות שזה פולינום אי-פריק באופן ישיר (מציאת שורשים...), אנחנו נראה פה דרך אחרת:
אפשר לראות כי $\mathbb{Q}[i+\sqrt{2}]\subseteq\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]$ ולכן $deg\left(f_{i+\sqrt{2}}\right)\mid\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]\colon\mathbb{Q}\right]\overset{*}{=}4$ (הכוכבית: מתרגיל קודם).
הדרגה לא יכולה להיות 2 כי אז $\left(i+\sqrt{2}\right)^2=a+b\left(i+\sqrt{2}\right)$ לאיזשהם $a,b\in\mathbb{Q}$, אבל מהשוואת מקדמים קל לראות שזה לא אפשרי.
ולכן x^4-2x^2+9 (שהוא מדרגה 4) הוא באמת הפולינום המינימלי.

2. נסמן $\alpha=i+\sqrt{2}$, אזי $\sqrt{2}=\alpha-i$, נעלה בריבוע ונקבל $2=\alpha^2-\alpha i-1$ ולכן α מאפס את הפולינום x^2-ix-3 שהוא אי-פריק מעל $\mathbb{Q}[i]$ או מחישוב ישיר, או מחישוב של המימד $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]\colon\mathbb{Q}[i]\right]=2$ (באופן דומה למה שעשינו בסעיף הקודם).

3. קל לראות שהוא מאפס את x^3-7 שהוא אי-פריק לפי אייזנשטיין, ולכן זהו הפולינום המינימלי.

4. ראינו שהוא מאפס את x^3-7, השאלה היא אם הוא פריק מעל $\mathbb{Q}\left[\sqrt{7}\right]$.
אם בשלילה הוא פריק זה אומר שיש לו שם שורש $\alpha\in\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ (כי זה מדרגה 3)
.
וזה אומר ש $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}[\alpha]\subseteq\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$.
כעת, $[\mathbb{Q}[\alpha]\colon\mathbb{Q}]=3$ כי α הוא שורש של x^3-7 שהוא אי-פריק. ולכן נקבל ש $2=\left[\mathbb{Q}[\sqrt{7}]\colon\mathbb{Q}\right]\mid 3$ —שזו סתירה!

שאלה 4. תהיינה הרחבות אלגבריות

$$[F[a]\colon F]=n$$
$$[F[b]\colon F]=m$$

1. הוכיחו כי $[F[a,b]\colon F]\leq n\cdot m$.
2. אם בנוסף $(n,m)=1$ הוכיחו כי $[F[a,b]\colon F]=n\cdot m$.
3. בונוס: מצאו דוגמא להרחבות עבורן אין שיוויון.

פתרון. 1. לפי כפליות המימד $[F[a,b]\colon F]=[F[a,b]\colon F[a]]\underbrace{[F[a]\colon F]}_{=n}$.
$[F[b]\colon F]=m$ ולכן יש פולינום (מעל F) מדרגה m שמתאפס בb ולכן $[F[a,b]\colon F[a]]\leq m$,
וסך הכל נקבל ש $[F[a,b]\colon F]\leq n\cdot m$.

2. שוב מכפליות המימד נקבל ש

$$n=[F[a]\colon F]\mid[F[a,b]\colon F]$$
$$m=[F[b]\colon F]\mid[F[a,b]\colon F]$$

ולכן $[F[a,b]\colon F]\mid[n,m]=nm$. יחד עם הסעיף הקודם נקבל שיוויון.

3. נקח למשל את $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ו $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$.

$$\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\colon\mathbb{Q}\right]=2$$
$$\left[\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]\colon\mathbb{Q}\right]=4$$

אבל $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2},\sqrt{2}]=\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$ ולכן $\left[\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2},\sqrt{2}]\colon\mathbb{Q}\right]=4\neq 2\cdot 4$.

שאלה 5. הזכרו שהוכחנו כי $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]=\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$. חשבו את $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}\right]$ ומצאו פולינום מינימלי של $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון. כעת נחשב את הפולינום המינימלי.
נסמן $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. אזי

$$\alpha^2=5+2\sqrt{6}$$
$$\alpha^4=25+20\sqrt{6}+24=49+20\sqrt{6}$$

ואפשר לראות ש $\alpha^4-10\alpha=-1$ ולכן α מאפס את הפולינום $x^4-10x+1$. הפולינום הזה מדרגה 4 (שזה מימד ההרחבה כמו שחישבנו) ולכן הוא הפולינום המינימלי.