אלגברה לינארית 2 תרגול 4

21 באפריל 2021

תרגילים:

1. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה משולשית עליונה. מצאו את הפולינום האופייני שלה.
פתרון: נקבל שהמטריצה $\lambda I - A$ גם משולשית, ולכן הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון, כלומר:

$$P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - A_{ii})$$

מסקנה: איברי האלכסון הם הערכים העצמיים. הריבוי האלגברי של כל ע"ע, הוא כמות הפעמים שהוא מופיע על האלכסון.

2. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה, ונתון שיש לה n ע"ע שונים. הוכיחו שהיא לכסינה.
פתרון: לכל ע"ע יש לפחות ו"ע אחד (ר"ג הוא לפחות אחד, ולכל היותר הריבוי האלגברי), וכידוע ו"ע של ע"ע שונים הינם בת"ל. כאן, כיון שיש n ע"ע שונים, ולכל אחד ו"ע שבת"ל עם הו"ע של הע"ע האחרים, ביחד יש לנו בסיס המורכב מוקטורים עצמיים, ולכן לכסינה.

3. עבור אילו ערכי $a, b \in \mathbb{R}$ המטריצה הבאה לכסינה:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

פתרון: המטריצה משולשית, ולכן נקבל:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2(\lambda - b)$$

עבור $b \neq 2, 3$: קיבלנו ע"ע: 2 עם ר"א 2, 3 עם ר"א 1, b עם ר"א 1.

נחשב את הר"ג של 2:

	3	2	b
ר"א	1	2	1
ר"ג	1	2	1

$$\dim N(2I-A)=\dim N\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 2-b\neq 0 \end{pmatrix}$$

יש שני איברי ציר, ולכן המימד הוא 2 .

בסה"כ: עבור $b\neq 2,3$ אז לכל a המטריצה לכסינה.

עבור $b=2$ נקבל:

נחשב ר"ג של 2:

	3	2
ר"א	1	3
ר"ג	1	$\begin{cases} 3 & a=0 \\ 2 & a\neq 0 \end{cases}$

$$\dim N(2I-A)=\dim N\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל שעבור $a=0$ נקבל מימד 3, ולכן לכסינה. עבור $a\neq 0$ נקבל מימד 2 ולכן לא לכסינה.

עבור $b=3$ נקבל:

נחשב ר"ג של 2:

	3	2
ר"א	2	2
ר"ג	$\begin{cases} 1 & a\neq 0 \\ 2 & a=0 \end{cases}$	2

$$\dim N(2I-A)=\dim N\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן לכל a יש שני איברי ציר, ולכן ר"ג של 2 הוא 2.

נותר לחשב ר"ג של 3:

$$\dim N(3I-A)=\dim N\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-a&0&0\end{pmatrix}$$

עבור $a\neq 0$ נוכל לדרג לצורה

$$\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-a&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן יש שלושה איברים מובילים ור"ג 1, ולכן לא לכסינה. אם $a=0$ נקבל ר"ג 2 ולכן לכסינה.

4. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מרטיצה, ונתון $rank(A)=1$.

(א) הוכיחו: לכל $x\neq y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ מתקיים: $A-xI$ הפיכה, או $A-yI$ הפיכה.

פתרון: נקבל $\dim N(A)=n-1$, ולכן $\dim N(A-0I)=n-1$, ולכן 0 ע"ע עם ר"ג $n-1$. לכן ר"א של 0 הוא לפחות $n-1$, וכיון שבסה"כ סכום הריבויים האלגבריים של כל הערכים העצמיים זה לכל היותר n, נקבל שיש לכל היותר ע"ע אחד שונה מאפס. כעת, יהיו $x\neq y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ונניח בשלילה ש־ $A-xI$ לא הפיכה וגם $A-yI$ לא הפיכה. העובדה ש־ $A-xI$ לא הפיכה אומרת ש־x ע"ע של A כי: יש $v\neq 0$ כך ש־ $(A-xI)v=0$ מה שאומר $Av=xv$, ולכן x ע"ע. באותו אופן בדיוק מהעובדה $A-yI$ לא הפיכה נקבל y ע"ע. וקיבלנו שני ע"ע שונים בנוסף על 0, מה שלא יכול להיות. סתירה.

(ב) האם בהכרח קיים $x\neq 0$ עבורו $A-xI$ לא הפיכה?

פתרון: ראינו ש־0 ע"ע עם ר"ג $n-1$. האם בהכרח יש ע"ע נוסף? התשובה היא לא, יכול להיות ש־0 הוא ע"ע עם ר"א n ור"ג $n-1$, ואז אין עוד ע"ע נוסף. למשל:

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

כאן 0 ע"ע עם ר"א 2 (פולינום אופייני של משולשית), ור"ג 1 כי $\dim N(A)=1$.

5. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}&\pi&2\\0&2&-\sqrt{3}&1\\0&0&3&5\\0&0&0&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\4&4&0&0\\-3&\sqrt{5}&2&0\\2&-2&e&3\end{pmatrix}$$

פתרון: כמסקנה משאלות 1,2 נקבל: משאלה 1 איברי האלכסון הם ע"ע, משאלה 2 כיון שיש 4 ע"ע שונים שתיהן לכסינות, ושתיהן דומות למטריצה האלכסונית

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}$$

יחס דמיון הוא יחס שקילות, ולכן אם שתי מטריצות דומות למטריצה D, אז הן דומות אחת לשנייה.

6. סדרת פיבונאצי מקיימת:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$\forall n > 2 : a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

אנחנו רוצים למצוא הצגה מפורשת של האיבר הכללי, בעזרת לכסון.

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

וקיבלנו:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}}$$

אם ממשיכים הלאה, רואים שמתקיים:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כל שנותר הוא לחשב את A^n בעזרת לכסון, ולקבל את התוצאה.