סמסטר א'

אלגברא לינארית 2

מועד ב'

ו בניסן

22.03.18

מרצה: פרופ' בוריס קוניאבסקי

מתרגלים: אחיה בר-און, תמר נחשוני.

מספר הקורס: 88-113-05

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון רגיל

<u>הנחיות:</u>

ענו על שלוש שאלות. אם עניתם על יותר שאלות מהנדרש – נא ציינו אילו שאלות הן לבדיקה; בהעדר אמירה מפורשת תיבדקנה השאלות הראשונות **.נא לענות על כל שאלה בעמוד נפרד**. .נא להסביר ולנמק בבירור את כל התשובות. ערך כל שאלה הוא 32 נק'. תקבלו 4 נק' עבור נקיון.

.בהצלחה!

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
נקיון	

שאלה 1

נתונה $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 \\ 3a & 0 & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}$.

א. לאילו ערכים של a המטריצה A לכסינה מעל R? מעל C? (15 נק')

ב. עבור כל ערך של a מסעיף א', הציגו את הצורה האלכסונית D_a (5 נק')

ג. לשאר הערכים, הציגו את צורת ז'ורדן J של A ומצאו מטריצה P_a כך ש- $J = P_a^{-1}AP_a$ (12 נק')

א.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2a & -1 & 0 \\ -3a & \lambda & 0 \\ -a & 0 & \lambda+a \end{vmatrix} = (\lambda+a)\cdot\left[\lambda(\lambda-2a)-3a\right] =$$

$$= (\lambda+a)(\lambda^2-2a\lambda-3a) = (\lambda+a)\left(\lambda-(a+\sqrt{a^2+3a})\right)\left(\lambda-(a-\sqrt{a^2+3a})\right)$$

$$\frac{2a\pm\sqrt{4a^2+12a}}{2} = a\pm\sqrt{a^2+3a}$$

ע"ע: $\lambda = a\pm\sqrt{a^2+3a}$, $\lambda=-a$

R:

$-3<a<0$ יש ע"ע אחד ולכן לא לכסין עם ריבוי אלגברי 1

$a=0$ יש ע"ע אחד ($\lambda=0$) ר"א 3 ריבוי גאומטרי 2 ולכן לא לכסין

$a>0$, $a\leq-3$ יש 3 ע"ע שונים ולכן לכסין

C:

$a\neq0$ יש 3 ע"ע שונים ולכן לכסין

$a=0$ $\lambda=0$ ע"ע יחיד עם ר"ג $=2$ ולכן לא לכסין

ג.

$$D_a = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & a+\sqrt{a^2+3a} & 0 \\ 0 & 0 & a-\sqrt{a^2+3a} \end{pmatrix}$$

ד. <u>עבור $a=0$!</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זאת צורת הג'ורדן שלה!! ולכן $P_a = I$

עבור שאר ה-a-ים או ש-A לכסינה או

שאין לא ~~[illegible]~~ ניתנת לג'ורדן.

שאלה 2

א. הראו כי המעלה של הפולינום המינימלי של כל מטריצה ריבועית מסדר לפחות 2 ומדרגה 1 שווה ל-2. (10 נק')
רמז. הראו כי הדרגה של מטריצת אלכסונית-בלוקים שווה לסכום הדרגות של הבלוקים.

ב. בעזרת צורות ז'ורדן חשבו $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}^{50}, \begin{pmatrix}7 & -4\\ 14 & -8\end{pmatrix}^{64}$

הערה. אין קשר בין הסעיפים.

א.

$rank(A)=1$

$\dim N(A) = n-1$

לכן ע"ע $0=\lambda$ עם ר"ג $n-1$ יתכנו 2 מצבים

(I) הערך עצמי נוסף הוא $0=\lambda$

ולכן יש $n-1$ בלוקים כלומר

צורת הז'ורדן היא

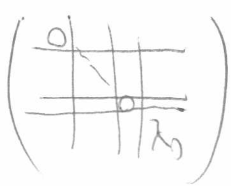
מכאן הפולינום המינימלי הוא $m_A(x)=x^2$

(II) ע"ע נוסף הוא $\lambda=\lambda_0$

ולכן יש $n-1$ בלוקים של 0

ובלוק נוסף של λ_0 כלומר צורת

הז'ורדן היא



ומסקנה כי $m_A(x)=x\cdot(x-\lambda_0)=$

$=x^2-\lambda_0 x$

$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}}$; $\quad P_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)+1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P_A^{-1} A P_A$$

$$A = P_A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P_A^{-1}$$

$$A^{50} = P_A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{50} P_A^{-1} = P_A \cdot \begin{pmatrix} 2^{50} & 50 \cdot 2^{49} \\ 0 & 2^{50} \end{pmatrix} P_A^{-1}$$

$\underline{\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}}$; $\quad P_A(\lambda) = (\lambda-7)(\lambda+8)+56 = \lambda^2 + \lambda$

$$V_0 = N\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix} = Sp\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad ! \ \underline{\lambda = 0}$$

$$V_1 = N\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{pmatrix} = Sp\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad ! \ \underline{\lambda = -1}$$

$$A^{64} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \\ & -1 \end{pmatrix}^{64} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$$

שאלה 3

יהי $V = M(n, C)$ מרחב המטריצות המרוכבות הריבועיות מסדר n .

א. הראו כי $\langle X, Y\rangle = tr(XY^*)$ מכפלה פנימית. (12 נק')

ב. לכל אחד מתתי-המרחבים הבאים הציגו בסיס אורתוגונלי ומצאו את המשלים האורתוגונלי:

- מרחב המטריצות X עם $tr(X) = 0$
- מרחב המטריצות הצמודות לעצמן (הרמיטיות)
- מרחב הממטריצות האנטי-הרמיטיות (כך ש- $X^* = -X$)
- מרחב המטריצות המשולשות העליונות. (20 נק')

א. בפשוט

לינארית 2 תיכוניסטים מועד ב תשעח, שאלה 3 ב:

1. $W_1 = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : tr(A) = 0\}$

(א) בסיס או"ג: המטריצות $\{E_{i,j} | i \neq j\} \in W_1$ או"ג. נשאר למצוא עוד n מטריצות שאיתם נקבל בסיס או"ג (אלו שאמורות ל"החליף" את המטריצות $\{E_{ii} - E_{i+1,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$) : אחרי בדיקה במקרים של 2×2 ו 3×3 ניתן להגיע למטריצות הבאות:

$$\begin{gathered}
Diag(1,-1,0\ldots 0)\\
Diag(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-1,0\ldots 0)\\
Diag(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},-\tfrac{3}{4},0\ldots 0)\\
Diag(\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{8},-\tfrac{4}{8},0\ldots 0)\\
\vdots\\
Diag(\tfrac{1}{2^{n-1}},\tfrac{1}{2^{n-1}},\ldots,\tfrac{1}{2^{n-1}},-\tfrac{n-1}{2^{n-1}})
\end{gathered}$$

כלומר מטריצות אלכסונית מהצורה הבא: האלכסון מתחיל ב k פעמים $\frac{1}{2^{k-1}}$ והקורדינאטה ה $k+1$ ית היא $-\frac{k}{2^{k-1}}$ (עבור $1 \leq k \leq n-1$). מטריצות אלו ייצרו בסיס או"ג (ביחד עם $\{E_{i,j} | i \neq j\}$)
נ.ב. אם זה לא ברור המכפלה הסטנדרטית ב $\mathbb{C}^{n\times n}$ שווה למכפלה הסטנדרטית על $\mathbb{C}^{n^2}$ עם נזהה כל מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ עם הייצוג לפי הבסיס הסטנדרטי שלה ב $\mathbb{C}^{n^2}$.

(ב) משלים או"ג: $span\{I\}$ (הממד צריך להיות 1 וכל מטריצה עם $tr = 0$ תקיים שהמ"פ עם I שווה 0)

2. טעות בשאלה - המטריצות שצמודות לעצמן אינן תת מרחב בכלל. למה? $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ צמודה לעצמה אבל כפולה ב i תתן מטריצה שאינה צמודה לעצמה.

3. טעות בשאלה - המטריצות שאנטי צמודות לעצמן אינן תת מרחב בכלל. למה? $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ אנטי צמודה לעצמה אבל כפולה ב i תתן מטריצה שאינה אנטי- צמודה לעצמה.

4. מרחב המטריצות המשולשיות העליונות:

(א) בסיס או"ג - $\{E_{i,j} : j \leq i\}$

(ב) בסיס למשלים או"ג - $\{E_{i,j} : i < j\}$

שאלה 4

שאלות "הוכח או הפרך". הניקוד על כל שאלה הוא 8 נקודות. נמקו היטב את תשובותיכם!

א. אם λ^2 ערך עצמי של A^2, אזי לפחות אחד מ-$\boldsymbol{\lambda}$ ו-$\boldsymbol{\lambda}-$ הוא ערך עצמי של A

λ^2 ע"ע של A^2 לכן $|A^2-\lambda^2 I|=0$

$|(A-\lambda I)(A+\lambda I)|=0$

$|A-\lambda I|\,|A+\lambda I|=0$

$|A-\lambda I|=0$ או $|A+\lambda I|=0$

$-\lambda$ ע"ע של A או λ ע"ע של A

ב. יש מטריצה ריבועית מרוכבת לא לכסינה A כך ש- $A^m = I$ (m מספר שלם, I מטריצת היחידה).

נתון $A^m = I$ לכן הע"ע של A^m הם 1

ראינו ש λ ע"ע של A $\Leftarrow$ λ^m ע"ע של A^m

לכן ~~הם~~ הע"ע של A הם מהצורה $\left\{cis\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right\}$

נתון ש- A לא לכסינה לכן קיים לה ע"ע

$\lambda_0 = cis\left(\frac{2\pi k_0}{m}\right)$ בגודל של לפחות 2 כלומר

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & \\ & \lambda_0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

אז

$$I = A^m = (PJ_AP^{-1})^m = PJ_A^m(P^{-1})^m$$

יתכן רק אם $J_A^m = I$

נתבונן בבלוק מגודל 2 (לפחות)

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ & \lambda_0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_0^m & \overset{\neq 0}{m\lambda_0^{m-1}} \\ 0 & \lambda_0^m \end{pmatrix} \neq I$$

לכן $J_A^m \neq I$ מכאן A^m לא יכולה להיות I.

ג. יהי V מרחב מכפלה פנימי . יהי T אופרטור לינארי ב-V. יהי T^* האופרטור הצמוד ל- T .
אזי $ker(T^*)$ הוא המשלים האורתוגונלי ל-$im(T)$.

יה' $v \in \ker T^*$ ו- $w \in Im(T)$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\exists u \in V: T(u) = w$ $T^*(v) = 0$

$\langle w, v \rangle = \langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$

ד. יהי $V = M(n, C)$ מרחב המטריצות המרוכבות הריבועיות מסדר n עם מכפלה פנימית $\langle X, Y\rangle = tr(XY^*)$, תהי $A \in M(n, C)$ ונגדיר את האופרטור הלינארי $T: V \to V$ ע"י הנוסחא $T(X) = AX$. אזי האופרטור הצמוד מוגדר ע"י הנוסחא $T^*(X) = A^*X$

$$\langle T(X), Y\rangle = \langle AX, Y\rangle = tr(\underline{A}\,\underline{XY^*}) = tr(XY^*A) =$$

$$= tr(XY^*A^{**}) = tr(X(A^*Y)^*) =$$

$$= \langle X, A^*Y\rangle = \langle X, T^*(Y)\rangle$$