שילוש

26 באפריל 2017

שילוש

הגדרה: $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ניתנת לשילוש אם היא צמודה למטריצה משולשית. כלומר קיימת P הפיכה כך ש

$$P^{-1}AP = U$$

משפט: A ניתנת לשילוש אמ"מ הפ"א $p_A(\lambda)$ מל"ל.

אלגורתים לשילוש בניתן $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$

1. חשב פ"א $p_A(\lambda)$, מצא ע"ע וו"ע. יהיו $v_!, \ldots, v_k$ מספר מקס' של ו"ע בת"ל המתאימים לע"ע $\lambda_1 \ldots, \lambda_k$. שים את הו"ע בעמודות מטריצה P והשלם עוד עמודות כך ש P מטריצה הפיכה (בפרט $C_i(P) = v_i$ לכל $1 \le i \le k$).
2. חשב את

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & M \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right)$$

3. שלש ברקורסיה את המטריצה B בעזרת מטריצה Q. (כלומר $Q^{-1}BQ = U$ משולשית).
4. הגדר $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_k & \\ & Q \end{pmatrix}$ ואז

$$\tilde{Q}^{-1}P^{-1}AP\tilde{Q} = \tilde{Q}^{-1}\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & M \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right)\tilde{Q} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & M \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & 0 & & Q^{-1}BQ \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & M \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & 0 & & U \end{array}\right)$$

נדגים איך משלשים מטריצה: תהא

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\-1&3&0&0&0&0\\-1&1&2&0&0&0\\-1&1&3&-2&1&0\\-1&1&3&-1&-1&1\\-1&1&3&-1&0&0\end{pmatrix}$$

זוהי מטריצת מהצורה

$$A=\begin{pmatrix}B&0\\&C\end{pmatrix}$$

ולכן נח

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda I-B&0\\&\lambda I-C\end{pmatrix}\right|=|\lambda I-B|\,|\lambda I-C|$$

כעת,

$$\begin{aligned}|\lambda I-B| &= \left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&0\\1&\lambda-3&0\\1&-1&\lambda-2\end{pmatrix}\right|=(\lambda-2)\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&0\\1&\lambda-3&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-2)\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-1\\1&\lambda-3\end{pmatrix}\right|\\ &= (\lambda-2)\left[(\lambda-1)(\lambda-3)+1\right]=(\lambda-2)\left[\lambda^2-4\lambda+4\right]=(\lambda-2)^3\end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned}|\lambda I-C| &= \left|\begin{pmatrix}\lambda+2&-1&0\\1&\lambda+1&-1\\1&0&\lambda\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda+2&-1&\lambda+1\\1&\lambda+1&\lambda+1\\1&0&\lambda+1\end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)\left|\begin{pmatrix}\lambda+2&-1&1\\1&\lambda+1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\right|\\ &= (\lambda+1)\left|\begin{pmatrix}\lambda+1&-1&1\\0&\lambda+1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)^3\end{aligned}$$

ובסה"כ

$$p_A(\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-2)^3$$

נמצא ו"ע:

עבור $\lambda=2$ נקבל

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0&0\\-1&1&3&-4&1&0\\-1&1&3&-1&-3&1\\-1&1&3&-1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&3&-4&1&0\\0&0&3&-1&-3&1\\0&0&3&-1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&3&-4&1&0\\0&0&0&3&-4&1\\0&0&0&3&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ s \\ s \\ s \\ s \end{pmatrix} \, : \, s, t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $\lambda = -1$ נקבל

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נשים את הו"ע ב־3 עמדות של מטריצה P ונשלים את שאר העמודות כך ש P תהיה הפיכה. למשל

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מחישוב ישיר, נקבל כי

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

נמשיך באותו אופן עם המטריצה $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. כיוון שלמטריצות צמודות אותו פולינום אופיני נקבל כי

$$(\lambda-2)^2(\lambda+1)\cdot p_B(\lambda)=p_A(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda+1)^3$$

ולכן

$$p_B(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

נמצא ו"ע: עבור $\lambda=-1$

$$B+I \quad = \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=-1}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} : s,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda=2$

$$B-2I \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=2}=\left\{\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : s,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

נשים את הו"ע בעמודות מטריצה Q ונשלים עמודה על מנת ש Q תהיה הפיכה. נגדיר

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ובחישוב ישיר

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

משלושית.

הערה: שימו לב שאם יש 2 ו"ע למטריצה 3 על 3 - אין צורך בשלב נוסף.

נגדיר

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_3 & \\ & Q \end{pmatrix}$$

ואז

$$\tilde{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} I_3 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

נחבר הכל ביחד ונקבל

$$\tilde{Q}^{-1}P^{-1}AP\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_3 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 & \\ & Q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 2 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & -1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & Q^{-1}BQ & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 2 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & -1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ניתנת לשילוש. יהיו $\lambda_1 \dots \lambda_n$ הע"ע שלה. הוכח $|A| = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ וגם $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ (כלומר הדטרמינטטה שווה למכפלה הע"ע והעקבה לסכום הע"ע)

פתרון: נתון כי קיימת P כך ש $P^{-1}AP = U$ ובנוסף, למטריצות דוצמודות יש אותה דטרמיננטה ואותה עקבה.

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ הפיכה כך ש $\left(A^3 + A\right)(A - 2I) = 0$ ומקיימת כי $tr(A) = 2$. מצא פ"מ ופ"א והוכיחו כי A כמטריצה מרוכבת לכסינה.

פתרון מהנתון הקבל כי הפולינום $g(x) = \left(\lambda^3 + \lambda\right)(\lambda - 2) = \lambda\left(\lambda^2 + 1\right)(\lambda - 2)$ מאפס את A ולכן הפ"מ מחלק אותו. מכאן ש

$$m_A(\lambda) \in \left\{\lambda\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2), \left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2), \lambda(\lambda-2), \lambda\left(\lambda^2+1\right), \lambda\left(\lambda^2+1\right), \lambda^2+1, (\lambda-2), \lambda\right\}$$

כיוון ש A הפיכה, אין לה ע"ע 0 ולכן אין גורם λ.נמשיך:

אם הפ"מ הוא $(\lambda - 2)$ אזי הפ"א הוא $(\lambda - 2)^7$ שזה סותר את $tr(A) = 2$

הפולינום $\lambda^2 + 1$ לא יכול להיות כי אז $A^2 + I = 0$ מה שגורר $A^2 = -I$. אם נוציא דט' נקבל כי $|A|^2 = -1$ מה שלא יכול להיות.

לכן $m_A(\lambda) = \left(\lambda^2 + 1\right)(\lambda - 2)$. בתור מטריצה מרוכבת יש לה רק את הע"ע $\pm i, 2$. כיוון שהסכום שלהם =2 אזי יש לה רק ע"ע בודד ששווה 2 ($tr(A)$ שווה סכום הע"ע המרוכבים שלה)

ולכן $p_A(A) = \left(\lambda^2 + 1\right)^3(\lambda - 2)$ (כי החזקה צריכה להיות 7)

לכן כמטריצה מרוכבת $m_A(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - 2)$ שמל"ל שונים ולכן לכסינה.

הערה: דימיון מטריצות $A \sim B$ הוא יחס שקילות. כלומר:

- $A \sim A$

- אם $A \sim B$ אזי $B \sim A$
- אם $A \sim B, B \sim C$ אזי $A \sim C$

תרגיל: הוכח ש $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{17} & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ מטריצות צמודות.

פתרון: לשתיהן יש 3 ע"ע שונים שהם $1, 2, 3$ ולכן שתיהן דומות למטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

.