8.11.15

תורת הקבוצות

תרגול 3

הגדרת טבעיים

בנייה: $0=\emptyset$ $\quad n+1=n\cup\{n\}$

הגדרה: (פורמלית). נגיד שסודר α הוא טבעי
אם לכל $\beta\leq\alpha$ $\beta=\emptyset$ או β עוקב.

נוכיח שקילות:

($\Leftarrow$) יהי n טבעי מהבנייה. נראה שעונה להגדרה הפורמלית.
כלומר צריך להראות ש-n מקיים לכל $\alpha\leq n$ $\alpha=\emptyset$ או α עוקב.

[הערה: קודם כל צריך בכלל להראות שכל ה-n-ים הם סודרים. הראינו בהרצאה.]

נניח בשלילה שיש n שלא מקיים את התכונה.
בגלל שהקבוצה זו היא קבוצת סודרים, נבחר את הראשון
שלא מקיים את התכונה. קל לראות ש-0 עונה על ההגדרה
ולכן $n\neq 0$. לכן $n=m\cup\{m\}$ כאשר $m+1=n$.
אז n בעצמו הוא עוקב, $m<n$ ולכן m בעצמו הוא
אפס או עוקב (מבחירת n) וכן כל מה שקטן ממנו.
אז n הוא העוקב של m. לכן לכל $\alpha<n$ $\alpha\leq m$,
וראינו ש-α מקיים $\alpha=\emptyset$ או α עוקב.
לכן n עונה על ההגדרה בסתירה!

($\Rightarrow$) צריך להראות שאם α מקיים את ההגדרה הפורמלית.
(צ.ל) יש n כך ש- $\alpha=n$. לכל קבוצה לא ריקה של סודרים
יש איבר ראשון. נניח שיש α שלא שווה לאף n.
נבחר את הראשון שמקיים זאת.
לא ייתכן $\alpha=\emptyset$ שכן $0=\emptyset$, לכן α עוקב.
ולכן קיים β כך ש- $\alpha=\beta+1$, נשים לב ש- β בעצמו
גם עונה על ההגדרה. כי לכל $\gamma\leq\beta$, $\gamma<\alpha$ ולכן
$\gamma=\emptyset$ או γ עוקב.

בגלל ש- α הראשון לא שווה לאף n. ברור ש- $\beta < \alpha$.

יש m כך ש- $\beta = m$. אבל $\alpha = \beta + 1$ - אז

$\alpha = \{\beta\} \cup \beta = m \cup \{m\} = m+1$ הסתירה!

הגדרה: כל מספר טבעי n הוא קבוצה בת n איברים.

הוכחה: נניח בשלילה שיש n שלא מקיים את הנ"ל (נבחר את הראשון).

$n \neq 0$ כי $0 = \emptyset$ = קבוצה בת 0 איברים.

לכן $n = m \cup \{m\}$ עבור $n = m+1$, $m < n$

לכן ב- m יש בדיוק $n-1$ איברים.

נזכור שכל הטבעיים הם סודרים, וסודר לא שייך לעצמו

לכן $m \notin m$ לכן ב- n יש בדיוק n איברים.

מש"ל!

טענה: $n = \{0, \dots, n-1\}$

הוכחה: בדיוק כמו ההוכחה הקודמת.

נשים לב כי בכל פעם ל- n שאנחנו מוסיפים את האיבר $n-1$.

תרגיל: (הנחות פיאנו).

הוכח את התכונות הבאות על $W = \{n / n \in \mathbb{N}\}$

א. $0 \in W$.

ב. לכל $n, m \in W$ כך ש- $n \neq m$ גם $S(n) \neq S(m)$ (עוקב).

ג. אם $A \subseteq W$ ו- $0 \in A$ ולכל $n \in A$ גם $S(n) \in A$ אז $A = W$.

פתרון: א. בהגדרה.

ב. יהיו $m \neq n$ רוצים להראות $m+1 \neq n+1$.

כלומר $m \cup \{m\} \neq n \cup \{n\}$. נניח בשלילה.. שיש שוויון.

לכן $m \in m \cup \{n\}$ אבל $n \neq m$ לכן $m \in n$

וכנ"ל בכיוון השני. $n \in m$ וזו סתירה!

3. נניח ש- $A\neq\omega$. לכן $\omega\setminus A\neq\emptyset$ ויש בה איבר ראשון

$a\in\omega\setminus A$, $a\neq 0$ כי $0\in A$.

לכן $a=S(b)$ לאיזשהו b. $b<a$ לכן $b\in A$.

אבל מטרנזיטיביות A מתקיים $a=S(b)\in A$ בסתירה.

טיפוס סדר

ראינו בהרצאה שלכל $(A,<)$ קבוצה סדורה היטב.

יש סודר יחיד α כך שיש איזו סדר $f:A\to\alpha$

נגיד שטיפוס הסדר של A הוא α.

תרגיל: תהא A סדורה היטב בת n איברים. טיפוס הסדר של A הוא n.

פתרון: קיים סודר α כך ש- $f:A\to\alpha$ איזו' סדר

f חח"ע ועל ולכן $|\alpha|=n$. לכן $\alpha=n$.

תרגיל: יהא $(A,<)$ סדר טוב. הוכח שאם $x<y$ מתקיים

$$otp((x\downarrow,<))<otp((y\downarrow,<))$$

פתרון: נסמן $\alpha=type((y\downarrow,<))$

כלומר יש $f:y\downarrow\to\alpha$ איזו' סדרי.

נשים לב. $x\downarrow\subseteq y\downarrow$ כי אם $z<x \Rightarrow z<y$.

זה מוכל ממש כי $x\in y\downarrow\setminus x\downarrow$,

נסתכל על $f(x\downarrow)\subseteq\alpha$ נרצה להראות ש- $f(x\downarrow)$ סודר.

מספיק להראות ש- $f(x\downarrow)$ טרנזיטיבית. (נוכיח באופן כללי).

תהא $f:A\to B$ איזו' סדר $C\subseteq A$ טרנזיטיבית.

נרצה להראות $f(C)$ טרנזיטיבית

יהי $x\in f(C)$ $y<x$ נרצה $y\in f(C)$.

לכן יש $z\in C$ כך ש- $f(z)=x$

הפונקציה על ולכן יש מקור ל- y. יש w כלשהו כך ש- $f(w)=y$.

$y<x \Rightarrow w<z$. C רישא (טרנזיטיבית)

לכן $w\in C \Rightarrow y=f(w)\in f(C)$ לכן הוכחנו $f(C)$ רישא.

$f(x\downarrow)$ רישא בתוך α. $x\downarrow \subset y\downarrow$ לכן $f(x\downarrow) \subset f(y\downarrow)=\alpha$.

הוכחנו שכל רישא ממש של סודר היא בעצמה סודר!

נסמן $f(x\downarrow)=\beta$ $\quad \beta \subset \alpha \Rightarrow \beta<\alpha$.

β הוא שיכון בסדר של $x\downarrow$, שכן f איזו' סדר

ולכן גם בצמצום של f ל $x\downarrow$. טמיזו' סדר. $[f|_{x\downarrow} \to f(x\downarrow)]$

מש"ל!

<u>תרגיל:</u> תהיה $(A,<)$ סדורה היטב. $B \subseteq A$ <u>שולית</u>

נניח שקיים סודר α כך שלכל $b\in B$ $otp((b\downarrow,<))<\alpha$.

הוכח $otp((A,<))\leq\alpha$.

<u>פתרון:</u> נניח בשלילה ש- $\beta = otp(A,<) > \alpha$.

. יש איזו' סדר $f: A\to\beta$ $\quad \alpha\in\beta$

לכן יש לו מקור! $a=f^{-1}(\alpha)$ ב-A.

לכן $otp(a\downarrow)=\alpha$. קיים $b\in B$ כך ש .

$b\geq a$. לכן $otp(b\downarrow)\geq otp(a\downarrow)\geq\alpha$ לכן סתירה!

<u>חיבור סודרים</u>

<u>הגדרה:</u> α,β סודרים, נגדיר $\alpha+\beta = otp(\alpha\times\{0\} \cup \beta\times\{1\})$

עם הסדר שהגדרנו על איחוד זר של קבוצות.

<u>תכונות:</u> (1) $\alpha+\emptyset=\emptyset+\alpha=\alpha$.

(2) חיבור סודרים הוא <u>לא</u> <u>קומוטטיבי</u>. (לדוגמא $\omega+1 \neq 1+\omega=\omega$)

(3) $\beta_1<\beta_2 \Rightarrow \alpha+\beta_1<\alpha+\beta_2$.

(4) אם $\beta_1\leq\beta_2$ אז $\beta_1+\alpha\leq\beta_2+\alpha$.

<u>הוכחה:</u> מספיק להוכיח $f:\beta_1+\alpha\to\beta_2+\alpha$ חח"ע ושומרת סדר.

כי אם $A\subseteq B$ אז $otp(A)\leq otp(B)$.

ידוע שיש $g:\beta_1\to\beta_2$ חח"ע ושומרת סדר (מהתרגול)

אז
$$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in\beta_1 \\ x & x\in\alpha \end{cases}$$
(לא פורמלי!)

וזה אכן מקיים את הדרוש!

תרגיל: הוכח. $S(\alpha) = \alpha+1$ (הגדרה חיבור)
(הגדרה ישנה)

פתרון: צריך למצוא $f: \alpha+1 \to \alpha\cup\{\alpha\}$ איזו' סדר.

נשים לב ש- $\alpha+1 = \alpha\times\{0\} \cup 1\times\{1\}$

לכן $\forall \beta<\alpha : f(\beta,0)=\beta$

$f(1,1)=\alpha$.

(על) המקור של α הוא $(1,1)$ ושל $\beta\in\alpha$ המקור הוא $(\beta,0)$.

(חח"ע) ברור...

(שומרת סדר) יהיו $\gamma_1<\gamma_2$ ב- $\alpha+1$. אם $\gamma_1,\gamma_2\in\alpha$.

אז $\gamma_1=(\beta_1,0)$, $\gamma_2=(\beta_2,0)$

$\Rightarrow$ $\beta_1<\beta_2$ ואכן $f(\gamma_1)<f(\gamma_2)$.

אם $\gamma_2=(1,1)$ אז $f(\gamma_1)=\beta\in\alpha$ ו- $f(\gamma_2)=\alpha$.

לכן $\beta<\alpha$ כנדרש. מ.ש.ל!

תרגיל: $S(\alpha+\beta)=\alpha+S(\beta)$

פתרון: הראנו ש- $S(\gamma)=\gamma+1$

(שיוכיות סדר. כסכום סודרים)

לכן $S(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)+1 = \alpha+(\beta+1) = \alpha+S(\beta)$

חיסור סודרים

יהיו $\alpha\le\beta$ נגדיר $\beta-\alpha = otp(\beta\setminus\alpha)$

תרגיל: הוכח את התכונות הבאות.

① $\alpha+(\beta-\alpha)=\beta$

② $\alpha=\beta \iff 0=\beta-\alpha$.

③ $\alpha<\beta \iff 0<\beta-\alpha$.

פתרון: ① נרצה למצוא $f:\beta\to\alpha+(\beta\setminus\alpha)$ שהיא שומרת סדר.

קודם כל נשים לב ש- $\beta\setminus\alpha=\gamma$ רק ש-

γ הוא טיפוס סדר של $\beta\setminus\alpha$.

יהיו $\delta\in\beta$. אם $\delta\in\alpha$ $f(\delta)=(\delta,0)$

אחרת $\delta\notin\alpha$ אז $\delta\in\beta\setminus\alpha$. $otp(\beta\setminus\alpha)=\gamma$

לכן קיים $g:\beta\setminus\alpha\to\gamma$ איזו סדר.

ולכן נגדיר $f(\delta)=(g(\delta),1)$.

על: המקור של $(\delta,0)$ הוא δ עבור $\delta<\alpha$.

המקור של $(\delta,1)$ עבור $\delta<\gamma$ הוא $g^{-1}(\delta)$

קיים כי g על!

שומר סדר: אם $\beta_1<\beta_2\in\alpha$ אז $f(\beta_1)=(\beta_1,0)<(\beta_2,0)=f(\beta_2)$

אם $\delta_1<\delta_2\in\beta\setminus\alpha$

אז בגלל ש-g שומר סדר אז f שומר סדר!

אם $\delta_1\in\alpha$ $\delta_2\in\beta\setminus\alpha$ אז אוטומטית $\delta_1<\delta_2$.

לכן $f(\delta_1)\in\alpha$ $f(\delta_2)\in\beta\setminus\alpha$ לכן $f(\delta_1)<f(\delta_2)$

תרגיל: הוכח שאם $\alpha+\beta_1<\alpha+\beta_2$ אז $\beta_1<\beta_2$.

הוכחה: נניח בשלילה. $\beta_1\geq\beta_2$ אז $\alpha+\beta_1\geq\alpha+\beta_2$ בסתירה.

תרגיל: הוכיחו שהסודר $\sup_{\gamma\in A}(\gamma+1)$

הוא הקטן ביותר שגדול ממש מכל איברי A.

הוכחה: (גדול ממש) יהיה $\delta\in A$, לכן $\delta\in\delta+1$.

לכן $\delta\in\sup_{\gamma\in A}(\gamma+1)$.

(קטן ביותר) יהיה $\beta<\sup(\ )$.

כלומר $\beta\in\sup(\ )$ כלומר יש $\gamma\in A$ כך ש-

$\beta\in\gamma+1 \Rightarrow \beta<\gamma+1 \Rightarrow \beta\leq\gamma$

בפרט. $\beta\not>\gamma$ אז β לא גדול ממש מאיברי A.