מבוא לטופולוגיה – תרגיל 9 (פתרון)

<u>שאלה 1</u>
יהיו (X,τ_1) , (X,τ_2) שני מ"ט, כך ש-(X,τ_1) קומפקטי ו- $\tau_2 \subseteq \tau_1$.
<u>הוכיחו</u> ש-(X,τ_2) קומפקטי.

<u>הוכחה</u>
יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של (X,τ_2). אזי $U_\alpha \in \tau_2$ לכל $\alpha \in I$.
מכאן, לפי התנאי, $U_\alpha \in \tau_1$ לכל $\alpha \in I$, ולכן $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של (X,τ_1). כיוון ש-(X,τ_1) קומפקטי, קיימת תת-קבוצה $F \subseteq I$ סופית כך ש-$X = \cup_{\alpha\in F} U_\alpha$ (לפי הגדרת הקומפקטיות). אזי - לפי אותה ההגדרה - (X,τ_2) קומפקטי.

<u>שאלה 2</u>
יהי (X,τ) מרחב טופטלוגי עם *טופולוגיה קו-ספית*,
כלומר: $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \,|\, |U^c| < \infty\}$ (הוכחנו פעם ש-τ טופולוגיה).
<u>הוכיחו</u> ש-(X,τ) קומפקטי.

<u>הוכחה</u>
(כפיר סלומון ואליעזר שפרכר כבר מצאו את ההוכחה.)
אם $X = \emptyset$ אז הכול הוכך. אחרת, יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של המרחב. נבחר $\alpha_0 \in I$ כך ש-$U_{\alpha_0} \neq \emptyset$, אזי $\left|U^c_{\alpha_0}\right| < \infty$.
אם $U^c_{\alpha_0} = \emptyset$ אז $\{U_{\alpha_0}\}$ הוא התת-כיסוי המבוקש.
אם $U^c_{\alpha_0} \neq \emptyset$, אז $U^c_{\alpha_0} = \{x_1,\dots,x_n\}$ כאשר $x_1,\dots,x_n \in X$. במקרה הזה קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in I$ כך ש-$x_i \in U_{\alpha_i}$ $(1 \le i \le n)$. לכן: $X = U_{\alpha_0} \cup U^c_{\alpha_0} = U_{\alpha_0} \cup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$. מכאן $\left\{U_{\alpha_j}\right\}_{0\le j\le n}$ - התת-כיסוי המבוקש.

שאלה 3

תזכורת.

הגדרה. **תכונת החיתוך הסופי.**

אוסף קבוצות $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מקיים את *תכונת החיתוך הסופי* אם לכל תת-אוסף סופי שלו חיתוך לא ריק,

כלומר, לכל תת-קבוצה סופית $F\subseteq I$ מתקיים:

$$\bigcap_{\alpha\in F} A_\alpha \neq \emptyset$$

הוכיחו משפט (פעם הוכנו בכיתה במסגרת מרחבים מטריים):

מ"ט X קומפקטי אם ורק אם

כל אוסף $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של תת-קבוצות סגורות שלו המקיים **תכונת החיתוך הסופי** , הוא בעל חיתוך לא ריק, כלומר:

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$$

הוכחה

$\Leftarrow$) יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של תת-קבוצות סגורות שמקיים תכונת חיתוך סופי. נניח – בשלילה – ש- $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \emptyset$. אזי (חוקי דה מורגן) $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c = X$. כל A_α^c פתוחה כי A_α סגורה. לכן $\{A_\alpha^c\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X, וכיוון ש-X קומפקטי מכיל תת-כיסוי סופי $\{A_\alpha^c\}_{\alpha\in F}$ ($F\subseteq I$,F -סופית). אזי $\bigcup_{\alpha\in F} A_\alpha^c = X$ ולפי חוקי דה מורגן: $\bigcap_{\alpha\in F} A_\alpha = \emptyset$, שסותר לתכונת חיתוך סופי.■

$\Rightarrow$) יהי כל אוסף של תת-קבוצות סגורות של X , המקיים תכונת חיתוך סופי, בעל חיתוך לא ריק. נניח – בשלילה – ש-X לא קומפקטי. אזי קיים כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של X כך שהוא לא מכיל שום תת-כיסוח סופי. אזי לפי חוקי דה מורגן:

א) $\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha^c = \emptyset$ כי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי של X,
ב) $\bigcap_{\alpha\in F} U_\alpha^c \neq \emptyset$ לכל תת-קבוצה סופית $F \subseteq I$, ז"א, $\{U_\alpha^c\}_{\alpha\in I}$ מקיים תכונת חיתוך סופי.
עם זאת, כל U_α^c סגורות כי כל U_α פתוחות. אזי לפי התנאי א) סותר ל-ב).■

שאלה 4

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ו-Y מרחב האוסדורף.
תהא תת-קבוצה $A \subseteq X$ צפופה ב-X ויהיו $f, g: X \to Y$ שתי פונקציות רציפות כך ש- $g|_A = f|_A$.
הוכיחו ש- $f = g$.

הוכחה.

נניח בדרך השלילה שקיימת נקודה $x \in X$ כך ש-$f(x) \neq g(x)$.
נסמן: $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$. כיוון ש-Y מרחב האוסדורף, ב-Y קיימות סביבות $y_1 \in W_1$ ו-$y_2 \in W_2$ כך ש-$W_1 \cap W_2 = \emptyset$.
מכיוון ש- f, g רציפות אז כל אחת מהן רציפה בנקדה x. לכן לפי הגדרת רציפות פונקציה בנקדה אנחנו מקבלים:
קיימת סביבה U_x של x כך ש- $f(U_x) \subseteq W_1$,
וקיימת סביבה U_x' של x כך ש- $g(U_x') \subseteq W_2$.
נקח $V_x = U_x \cap U_x'$. אזי V_x קבוצה פתוחה ולכן מכילה נקודות מ-A (בגלל הצפיפות A ב-X). אבל אם $a \in V_x \cap A$, אז $f(a) = g(a)$ כי $g|_A = f|_A$. נסמן $b = f(a) = g(a)$. אז מקבלים:
$b \in f(V_x) \cap g(V_x) \subseteq f(U_x) \cap g(U_x') \subseteq W_1 \cap W_2 = \emptyset$.
סתירה.

שאלה 5. (מהארצאה האחרונה)
יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ו-B בסיס של המרחב X .
הוכיחו שפונקציה $f:X\rightarrow Y$ פתוחה אם ורק אם לכל $V\in B$ מתקיים: $f(V)$ היא קבוצה פתוחה ב-Y .

הוכחה
$\Leftarrow$) תהי $f:X\rightarrow Y$ פתוחה. יהי $V\in B$, אזי V פתוחה (הגדרת הבסיס). אבל אז $f(V)$ פתוחה בזכות הפתיחות של f.■
$\Rightarrow$) יהי לכל $V\in B$ $f(V)$ קבוצה פתוחה ב-Y, ותהי $U\subseteq X$ קבוצה פתוחה. אזי (ההרצאה) לכל $x\in U$ קיימת $V_x\in B$ כך ש-$U\supseteq V_x\ni x$. לפי למה שימושית מקבלים: $U=\cup_{x\in U}V_x$. מכאן: $f(U)=f(\cup_{x\in U}V_x)=\cup_{x\in U}f(V_x)$. כל $f(V_x)$ פתוחה לפי התנאי. לכן $f(U)$ פתוחה כאחוד של קבוצות פתוחות, מש"ל.