תרגיל 10

21 בינואר 2016

1. הוכיחו כי הקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ עם היחס $\leq$ הרגיל איזומורפי ל־$\mathbb{R}$ עם אותו היחס?

פתרון

הפונקציה $f\left(x\right)=\tan\left(x\right)$ היא פונקציה מ־$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ל־$\mathbb{R}$ היא הפיכה בקטע - $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ולכן חח"ע ועל (קיימת לה הופכית $\arctan:\mathbb{R}\longrightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$).
$f'\left(x\right)=\frac{1}{\cos^{2}\left(x\right)}>0$ ולכן הפונקציה עולה ממש ושומרת על היחסים ($x_1\leq x_2 \Leftrightarrow f\left(x_1\right)\leq f\left(x_2\right)$ $\forall x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$).

2. נביט בקס"ח $(A,|)$ הכוללת את המספרים מ־1 עד 24 עם היחס "מחלק את". היעזרו בדיאגרמה!

א. מהו $l(A)$, האורך של הקס"ח?

ב. מהו $w(A)$, הרוחב של הקס"ח?

ג. חלקו את הקס"ח ל־ $l(A)$ אנטי־שרשראות, ול־$w(A)$ שרשראות, כפי שמובטח במשפטים שלמדתם.

פיתרון:

א 5. אין שרשרת עם יותר מארבעה איברים. השרשרת $\{1,3,6,12,24\}$ מכילה חמישה איברים.

ב. 12. $\{4,6,9,10,14,15,21,22,13,17,19,23\}$ - אין אנטי־שרשרת עם יותר איברים.

ג. אנטי־שרשראות, למשל: $\{16,24\},\{8,12,18,20\},\{4,6,9,10,14,15,21,22\},\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\},\{1\}$.
שימו לב שפשוט לקחתי קבוצות לפי מספר הראשוניים המשתתפים בפירוק שלהם.

ות, למשל: $\{23\},\{19\},\{17\},\{13\},\{22,11\},\{21\},\{15\},\{14,7\},\{20,10,5\},\{18,9\},\{24,12,6,3\},\{16,8,4,2,1\}$.

3. הוכח או הפרך:

א. שרשרת המכילה איבר מקסימלי ואיבר מינימלי היא שרשרת בעלת עוצמה מקסימלית?

ב. שרשרת בעלת עוצמה מקסימלית מכילה איבר מקסימלי ואיבר מינימלי?

ג. כל שרשרת שהיא גם אנטי שרשרת היא בעלת עוצמה 1?

פתרון:

א. כמובן שלא נכון דוגמה נגדית $(\{1,2,3\}\,,\geq)$ קס"ח, $C=\{1,3\}$ שרשרת המכילה איבר מינימלי ואיבר מקסימלי אך אינה בעלת עוצמה מקסימלית.

ב. לא נכון: אם ניקח את $(\mathbb{N},\leq)$ קס"ח, $\mathbb{N}$ היא שרשרת בעלת עוצמה מקסימלית אך אינה מכילה איבר מקסימלי כי אין איבר מקסימלי הקס"ח.

ג. נכון: הוכחה:

נניח בשלילה כי קיימת שרשרת C שהיא גם אנטי שרשרת ומקיימת $|C|>1$.

קיימים $a\neq b\in C$, C שרשרת ולכן $b\leq a$ או $a\leq b$ אולם Cגם אנטי שרשרת ולכן $a\nleq b$ וגם $b\nleq a$ וזו כמובן סתירה.

4. הוכיחו כי בכל קס"ח האיברים המינימליים הם אנטי שרשרת.

(א) פתרון:

תהי $(A,\leq_A)$ קס"ח.

נסמן $C=\{$קבוצת האיברים המינימליים ב־$A\}$.

יהיו $a\neq b\in C$ צ"ל כי $a\nleq_A b$ וגם $b\nleq_A a$.

אם $b\leq_A a$ אזי $b=a$ כי b מינימלי לכן $a\nleq_A b$.

אם $a\leq_A b$ אזי $a=b$ כי a מינימלי. לכן $b\nleq_A a$